Poisson folyamatok

Sztochasztika

Illés Horváth

2024/10/31

Bevezetés

A Poisson eloszlást gyakran használjuk adott idő alatt bekövetkező véletlen események, balesetek számának modellezésére.

Bevezetés

A Poisson eloszlást gyakran használjuk adott idő alatt bekövetkező véletlen események, balesetek számának modellezésére.

Példák:

- egy városban a tűzesetek száma egy év alatt;

Bevezetés

A Poisson eloszlást gyakran használjuk adott idő alatt bekövetkező véletlen események, balesetek számának modellezésére.

Példák:

- egy városban a tűzesetek száma egy év alatt;
- egy internetes oldalra beérkező lekérdezések száma adott időszak alatt;

Bevezetés

A Poisson eloszlást gyakran használjuk adott idő alatt bekövetkező véletlen események, balesetek számának modellezésére.

Példák:

- egy városban a tűzesetek száma egy év alatt;
- egy internetes oldalra beérkező lekérdezések száma adott időszak alatt;
- az utcán egy perc alatt elhaladó autók száma;

Bevezetés

A Poisson eloszlást gyakran használjuk adott idő alatt bekövetkező véletlen események, balesetek számának modellezésére.

Példák:

- egy városban a tűzesetek száma egy év alatt;
- egy internetes oldalra beérkező lekérdezések száma adott időszak alatt;
- az utcán egy perc alatt elhaladó autók száma;
- egy boltba egy perc alatt betérő vásárlók száma;

Bevezetés

A Poisson eloszlást gyakran használjuk adott idő alatt bekövetkező véletlen események, balesetek számának modellezésére.

Példák:

- egy városban a tűzesetek száma egy év alatt;
- egy internetes oldalra beérkező lekérdezések száma adott időszak alatt;
- az utcán egy perc alatt elhaladó autók száma;
- egy boltba egy perc alatt betérő vásárlók száma;
- egy könyvben a hibák száma egy oldalon.

Bevezetés

A Poisson eloszlást gyakran használjuk adott idő alatt bekövetkező véletlen események, balesetek számának modellezésére.

Példák:

- egy városban a tűzesetek száma egy év alatt;
- egy internetes oldalra beérkező lekérdezések száma adott időszak alatt;
- az utcán egy perc alatt elhaladó autók száma;
- egy boltba egy perc alatt betérő vásárlók száma;
- egy könyvben a hibák száma egy oldalon.

Most nemcsak a hibák számára, hanem a teljes folyamatra kíváncsiak vagyunk.

Pontfolyamatok általában

Egy *pontfolyamat* $\mathbb{R}$ (vagy csak $[0, \infty)$) egy részhalmaza. Általában feltesszük, hogy a pontok nem torlódnak. A pontokat gyakran *érkezéseknek* hívjuk.

Pontfolyamatok általában

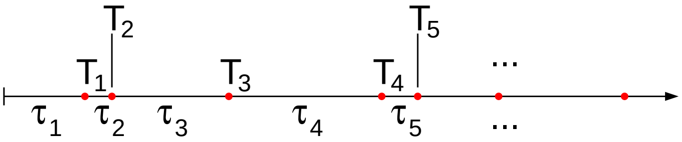
Egy *pontfolyamat* $\mathbb{R}$ (vagy csak $[0, \infty)$) egy részhalmaza. Általában feltesszük, hogy a pontok nem torlódnak. A pontokat gyakran *érkezéseknek* hívjuk. Egy pontfolyamat egy konkrét realizációja $[0, \infty)$-en többféle ekvivalens módon megadható:

- az érkezési idők listájával: $T_1, T_2, \ldots,$ vagy
- az érkezési időközök listájával: $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ vagy
- a számláló folyamattal: $N(t)$ az érkezések száma 0 és t között.

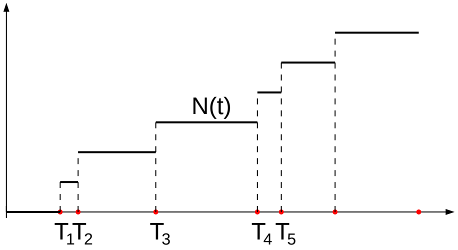
Pontfolyamatok általában

Egy *pontfolyamat* $\mathbb{R}$ (vagy csak $[0,\infty)$) egy részhalmaza. Általában feltesszük, hogy a pontok nem torlódnak. A pontokat gyakran *érkezéseknek* hívjuk. Egy pontfolyamat egy konkrét realizációja $[0,\infty)$-en többféle ekvivalens módon megadható:

- az érkezési idők listájával: $T_1, T_2, \ldots,$ vagy
- az érkezési időközök listájával: $\tau_1, \tau_2, \ldots,$ vagy
- a számláló folyamattal: $N(t)$ az érkezések száma 0 és t között.



Pontfolyamatok általában



T_n, τ_n és $N(t)$ között a kapcsolat a következő:

$$T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n, \qquad \tau_n = T_n - T_{n-1},$$
$$N(t) = \max\{n : T_n < t\}, \qquad T_n = \max\{t : N(t) \leq n-1\}.$$

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Első kérdés: milyen az első eseményig eltelt idő, azaz $T_1 = \tau_1$ eloszlása?

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Első kérdés: milyen az első eseményig eltelt idő, azaz $T_1 = \tau_1$ eloszlása?

Gondoljuk meg a következőt. Feltéve, hogy t idő már eltelt *esemény nélkül*, "közelebb" jutottunk-e az első eseményhez?

Memóriamentes tulajdonság

Egy véletlen pontfolyamatot szeretnénk definiálni az előzőek modellezésére.

Első kérdés: milyen az első eseményig eltelt idő, azaz $T_1 = \tau_1$ eloszlása?

Gondoljuk meg a következőt. Feltéve, hogy t idő már eltelt *esemény nélkül*, "közelebb" jutottunk-e az első eseményhez?

Tekintsük az autós példát. Ha elkezdjük számolni az utcán elhaladó autókat 9:00-kor (ami legyen most $t = 0$), és az első 1 percben nem halad el autó, akkor az első autóig még hátralévő idő eloszlása ugyanolyan, mint eredetileg, mert az autósokat nem érdekli, hogy mi 9:00-kor vagy 9:01-kor kezdtünk el számolni.

Ez formálisan úgy írható fel, hogy

$$\mathbb{P}(T_1 < t + s | T_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 < s) \qquad \forall s, t > 0,$$

vagy, ezzel ekvivalensen,

$$\mathbb{P}(T_1 > t + s | T_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > s) \qquad \forall s, t > 0.$$

A fenti tulajdonság teljesülése esetén azt mondjuk, hogy T_1 *memóriamentes*.

Memóriamentes tulajdonság

Tétel

(a) *Az exponenciális eloszlás memóriamentes. Azaz ha $T \sim EXP(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$-ra, akkor*

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0.$$

(b) *Az exponenciális eloszlás az egyetlen memóriamentes folytonos eloszlás. Azaz ha*

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0$$

teljesül egy folytonos T valószínűségi változóra, akkor $T \sim EXP(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$-ra.

Biz.

(a) Legyen $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$. Az eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \mathbb{P}(T < x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

és így

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t},$$

Memóriamentes tulajdonság

Biz.

(a) Legyen $T \sim \text{EXP}(\lambda)$ valamely $\lambda > 0$. Az eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \mathbb{P}(T < x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

és így

$$\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t},$$

továbbá

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \\ = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(T > s).$$

(b) Biz. (vázlat) Ha T-re teljesül a memóriamentes tulajdonság, akkor

$$\frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \mathbb{P}(T > s).$$

Legyen

$$g(t) = \log \mathbb{P}(T > t).$$

(b) Biz. (vázlat) Ha T-re teljesül a memóriamentes tulajdonság, akkor

$$\frac{\mathbb{P}(T > t + s)}{\mathbb{P}(T > t)} = \mathbb{P}(T > s).$$

Legyen

$$g(t) = \log \mathbb{P}(T > t).$$

Ekkor $g(t)$ kielégíti a Cauchy függvényegyenletet:

$$g(t + s) = g(t) + g(s) \qquad \forall t, s > 0$$

valamint folytonos, tehát a megoldása csak a lineáris függvény lehet:

$$g(t) = -\lambda t, \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}.$$

A Poisson pontfolyamat konstrukciója

Most már tudjuk, hogy $T_1 = \tau_1$ exponenciális eloszlású.

Most már tudjuk, hogy $T_1 = \tau_1$ exponenciális eloszlású.

Az első és második érkezés között eltelt τ_2 szintén memóriamentes, tehát exponenciális eloszlású, továbbá független τ_1-től, és így tovább.

A Poisson pontfolyamat konstrukciója

Most már tudjuk, hogy $T_1 = \tau_1$ exponenciális eloszlású.

Az első és második érkezés között eltelt τ_2 szintén memóriamentes, tehát exponenciális eloszlású, továbbá független τ_1-től, és így tovább.

Ez alapján a folyamatot a következőképpen konstruáljuk meg. A *Poisson pontfolyamat* (vagy röviden Poisson folyamat) egy olyan véletlen pontfolyamat $[0, \infty)$-en, ahol a $\tau_1, \tau_2, \ldots$ érkezési időközök független, azonos $\mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlásúak valamely $\lambda > 0$-ra.

A Poisson pontfolyamat konstrukciója

Most már tudjuk, hogy $T_1 = \tau_1$ exponenciális eloszlású.

Az első és második érkezés között eltelt τ_2 szintén memóriamentes, tehát exponenciális eloszlású, továbbá független τ_1-től, és így tovább.

Ez alapján a folyamatot a következőképpen konstruáljuk meg. A *Poisson pontfolyamat* (vagy röviden Poisson folyamat) egy olyan véletlen pontfolyamat $[0, \infty)$-en, ahol a $\tau_1, \tau_2, \ldots$ érkezési időközök független, azonos EXP(λ) eloszlásúak valamely $\lambda > 0$-ra.

λ a folyamat *ráta paramétere*. Az egész folyamatra használjuk a PPP(λ) jelölést is.

Na de miért pont Poisson?

Na de miért pont Poisson?

Tétel (Poisson pontfolyamat karakterizációja)

(a) *Egy PPP(λ)-ra teljesülnek a következő tulajdonságok:*
- *Az $[a, b]$ intervallumba eső érkezések számának eloszlása POI($\lambda(b-a)$), és*
- *diszjunkt intervallumba eső érkezések száma független.*

(b) *A fenti két tulajdonság együtt egyértelműen meghatározza PPP(λ)-t. Azaz bármely olyan pontfolyamat, amely kielégíti a fenti két tulajdonságot, ugyanolyan eloszlású, mint PPP(λ).*

Na de miért pont Poisson?

Tétel (Poisson pontfolyamat karakterizációja)

(a) *Egy PPP(λ)-ra teljesülnek a következő tulajdonságok:*
- *Az $[a, b]$ intervallumba eső érkezések számának eloszlása POI($\lambda(b-a)$), és*
- *diszjunkt intervallumba eső érkezések száma független.*

(b) *A fenti két tulajdonság együtt egyértelműen meghatározza PPP(λ)-t. Azaz bármely olyan pontfolyamat, amely kielégíti a fenti két tulajdonságot, ugyanolyan eloszlású, mint PPP(λ).*

Nem biz. (Hosszú számolás.)

A ráta paraméter

A karakterizációs tétel szerint ha X jelöli az $[a, b]$ intervallumbeli érkezések számát, amit úgy is fel lehet írni, hogy $X = N(b) - N(a)$, akkor $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b - a))$.

A ráta paraméter

A karakterizációs tétel szerint ha X jelöli az $[a, b]$ intervallumbeli érkezések számát, amit úgy is fel lehet írni, hogy $X = N(b) - N(a)$, akkor $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b-a))$.

Az X valószínűsége változó paramétere és egyúttal várható értéke $\lambda(b-a)$, ami arányos az intervallum hosszával és a ráta paraméterrel is.

A ráta paraméter

A karakterizációs tétel szerint ha X jelöli az $[a, b]$ intervallumbeli érkezések számát, amit úgy is fel lehet írni, hogy $X = N(b) - N(a)$, akkor $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b - a))$.

Az X valószínűsége változó paramétere és egyúttal várható értéke $\lambda(b - a)$, ami arányos az intervallum hosszával és a ráta paraméterrel is.

A λ ráta egy sűrűség jellegű paraméter: ha λ nagyobb, a folyamatnak sűrűbben vannak érkezései. Ez egyébként összhangban van azzal, hogy

$$\mathbb{E}(\text{egységnyi hosszú intervallumban az érkezések száma}) = \lambda,$$

$$\mathbb{E}(\text{érkezési időköz}) = \frac{1}{\lambda}.$$

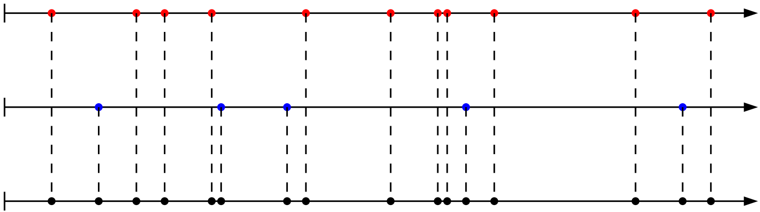
Unió

Tétel (Unió)

Egy egymástól független $PPP(\lambda_1)$ *és* $PPP(\lambda_2)$ *uniója* $PPP(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Tétel (Unió)

Egy egymástól független $PPP(\lambda_1)$ *és* $PPP(\lambda_2)$ *uniója* $PPP(\lambda_1 + \lambda_2)$*.*



Unió

Biz. A karakterizációs tétel miatt elég a következő lemma.

Lemma

Legyen $X_1 \sim POI(\mu_1)$ és $X_2 \sim POI(\mu_2)$ függetlenek. Ekkor $X_1 + X_2 \sim POI(\mu_1 + \mu_2)$.

Unió

Biz. A karakterizációs tétel miatt elég a következő lemma.

Lemma

Legyen $X_1 \sim POI(\mu_1)$ és $X_2 \sim POI(\mu_2)$ függetlenek. Ekkor $X_1 + X_2 \sim POI(\mu_1 + \mu_2)$.

Biz. POI(μ) generátorfüggvénye

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} z^k = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu z)^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu z} = e^{\mu(z-1)},$$

és így $X_1 + X_2$ generátorfüggvénye

$$e^{\mu_1(z-1)} \cdot e^{\mu_2(z-1)} = e^{(\mu_1+\mu_2)(z-1)}.$$

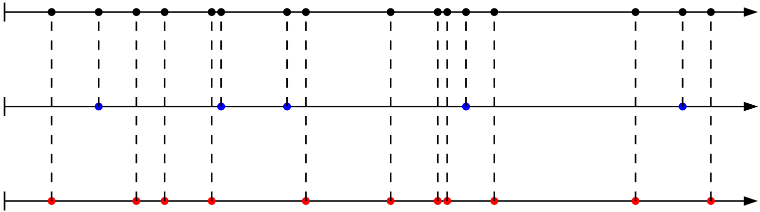
Ritkítás

Tétel (Ritkítás)

Egy PPP(λ)-ban minden érkezést p valószínűséggel pirossal, $1-p$ valószínűséggel kékkel jelölünk, függetlenül a többi érkezéstől. Ekkor a piros érkezések egy PPP($p\lambda$)-t alkotnak, a kék érkezések egy PPP($(1-p)\lambda$)-t, és a két folyamat független.

Tétel (Ritkítás)

Egy PPP(λ)-ban minden érkezést p valószínűséggel pirossal, $1-p$ valószínűséggel kékkel jelölünk, függetlenül a többi érkezéstől. Ekkor a piros érkezések egy PPP($p\lambda$)-t alkotnak, a kék érkezések egy PPP($(1-p)\lambda$)-t, és a két folyamat független.



Biz. A karakterizációs tétel miatt elég a következő lemma.

Lemma

Legyen $X \sim POI(\mu)$. Az X érkezés mindegyikét pirossal jelöljük p valószínűséggel és kékkel jelöljük $1 - p$ valószínűséggel, a többi érkezéstől függetlenül. Ekkor a piros érkezések eloszlása $POI(p\mu)$, a kék érkezések eloszlása $POI((1 - p)\mu)$, és a piros és kék érkezések száma független.

Ritkítás

Biz. A karakterizációs tétel miatt elég a következő lemma.

Lemma

Legyen $X \sim POI(\mu)$. Az X érkezés mindegyikét pirossal jelöljük p valószínűséggel és kékkel jelöljük $1-p$ valószínűséggel, a többi érkezéstől függetlenül. Ekkor a piros érkezések eloszlása $POI(p\mu)$, a kék érkezések eloszlása $POI((1-p)\mu)$, és a piros és kék érkezések száma független.

Biz. A piros érkezések száma felírható úgy, mint X darab Bernoulli valószínűségi változó összege. A Bernoulli eloszlás generátorfüggvénye $(1-p)+pz$, így a piros érkezések száma

$$e^{\mu((1-p)+pz-1)} = e^{p\mu(z-1)}.$$

Ritkítás

Biz. A karakterizációs tétel miatt elég a következő lemma.

Lemma

Legyen $X \sim POI(\mu)$. Az X érkezés mindegyikét pirossal jelöljük p valószínűséggel és kékkel jelöljük $1-p$ valószínűséggel, a többi érkezéstől függetlenül. Ekkor a piros érkezések eloszlása $POI(p\mu)$, a kék érkezések eloszlása $POI((1-p)\mu)$, és a piros és kék érkezések száma független.

Biz. A piros érkezések száma felírható úgy, mint X darab Bernoulli valószínűségi változó összege. A Bernoulli eloszlás generátorfüggvénye $(1-p)+pz$, így a piros érkezések száma

$$e^{\mu((1-p)+pz-1)} = e^{p\mu(z-1)}.$$

A függetlenséget nem biz.

Példa

Példa. Egy úton csak autók és motorosok közlekednek. A következőket tudjuk róluk:

- Átlagosan percenként 4 jármű halad el. A járművek 3/4-e autó, 1/4-e motor.

Példa

Példa. Egy úton csak autók és motorosok közlekednek. A következőket tudjuk róluk:

- Átlagosan percenként 4 jármű halad el. A járművek 3/4-e autó, 1/4-e motor.

Az unió és a ritkítás tétel szerint a fenti információ ekvivalens a következővel:

Példa

Példa. Egy úton csak autók és motorosok közlekednek. A következőket tudjuk róluk:

- Átlagosan percenként 4 jármű halad el. A járművek 3/4-e autó, 1/4-e motor.

Az unió és a ritkítás tétel szerint a fenti információ ekvivalens a következővel:

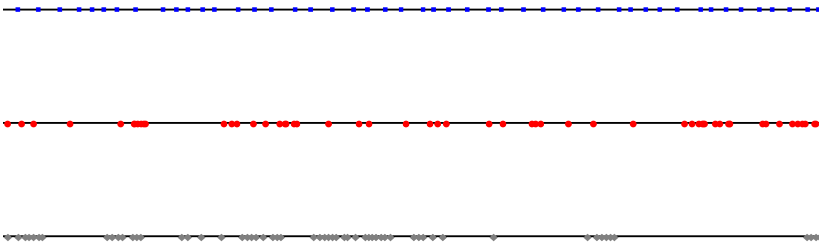
- Átlagosan percenként 3 autó és 1 motor halad el, és az autók és motorok függetlenek.

Példa

A következő 3 ábra közül csak az egyik Poisson pontfolyamat. Vajon melyik?

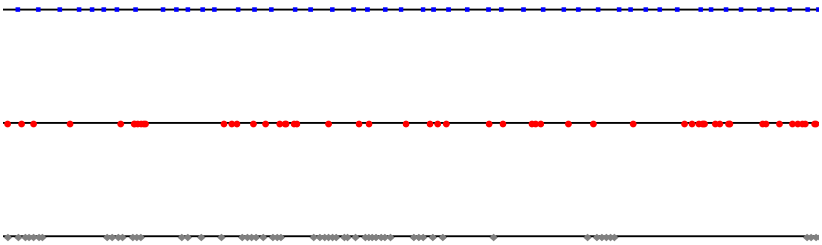
Példa

A következő 3 ábra közül csak az egyik Poisson pontfolyamat.
Vajon melyik?



Példa

A következő 3 ábra közül csak az egyik Poisson pontfolyamat. Vajon melyik?



A középső piros a Poisson folyamat. Az első, kék folyamatnál az érkezési időközök túl egyenletesek, míg az utolsó, szürke folyamatnál az érkezések időnként túlságosan összesűrűsödnek, míg máskor nagy szünetek vannak (egyébként az érkezési időköz Pareto eloszlású).

Tudjuk, hogy tavaly csak egyetlen tűzeset történt egy városban, de nem tudjuk, mikor. Mi lehet a tűzeset idejének az eloszlása az éven belül?

Tudjuk, hogy tavaly csak egyetlen tűzeset történt egy városban, de nem tudjuk, mikor. Mi lehet a tűzeset idejének az eloszlása az éven belül?

A fenti információ ismeretében az éven belül bármikor lehet, így az éven belüli eloszlásra azt várnánk, hogy egyenletes.

Intervallumon belüli helyzet

Tudjuk, hogy tavaly csak egyetlen tűzeset történt egy városban, de nem tudjuk, mikor. Mi lehet a tűzeset idejének az eloszlása az éven belül?

A fenti információ ismeretében az éven belül bármikor lehet, így az éven belüli eloszlásra azt várnánk, hogy egyenletes. Így is van:

Lemma

Ha egy PPP(λ)-nak csak egyetlen érkezése van egy $[a, b]$ intervallumon belül, akkor annak a helyzetének az eloszlása $U([a, b])$.

Intervallumon belüli helyzet

Biz. Legyen $c \in (a, b)$ és definiáljuk a következő eseményeket:

- A: pontosan egy érkezés történt $[a, c]$-ben,
- B: pontosan egy érkezés történt $[a, b]$-ben.

Intervallumon belüli helyzet

Biz. Legyen $c \in (a, b)$ és definiáljuk a következő eseményeket:

- A: pontosan egy érkezés történt $[a, c]$-ben,
- B: pontosan egy érkezés történt $[a, b]$-ben.

A cél azt belátni, hogy $\mathbb{P}(A|B) = \frac{c-a}{b-a}$. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ és } B)}{\mathbb{P}(B)};$$

Intervallumon belüli helyzet

Biz. Legyen $c \in (a, b)$ és definiáljuk a következő eseményeket:

- A: pontosan egy érkezés történt $[a, c]$-ben,
- B: pontosan egy érkezés történt $[a, b]$-ben.

A cél azt belátni, hogy $\mathbb{P}(A|B) = \frac{c-a}{b-a}$. Tudjuk, hogy

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ és } B)}{\mathbb{P}(B)};$$

először a nevezőt számítjuk ki:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a, b]\text{-ben}) = \frac{(\lambda(b-a))^1}{1!} e^{-\lambda(b-a)}$$

mivel az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}(\lambda(b-a))$ eloszlású.

Azután a számlálót:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a, c]\text{-ben és } 1 \text{ érkezés } [a, b]\text{-ben}).$$

Intervallumon belüli helyzet

Azután a számlálót:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a, c]\text{-ben és } 1 \text{ érkezés } [a, b]\text{-ben}).$$

Az $[a, c]$-beli és $[a, b]$-beli érkezések száma nem független, mert a két intervallum nem diszjunkt. Viszont ezt átfogalmazhatjuk $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumbeli érkezésekre, amik már függetlenek:

Intervallumon belüli helyzet

Azután a számlálót:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben és } 1 \text{ érkezés } [a,b]\text{-ben}).$$

Az $[a,c]$-beli és $[a,b]$-beli érkezések száma nem független, mert a két intervallum nem diszjunkt. Viszont ezt átfogalmazhatjuk $[a,c]$ és $[c,b]$ intervallumbeli érkezésekre, amik már függetlenek:

$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben és } 1\ [a,b]\text{-ben}) =$$
$$\mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben és } 0 \text{ érkezés } [c,b]\text{-ben}) =$$
$$\mathbb{P}(1 \text{ érkezés } [a,c]\text{-ben}) \cdot \mathbb{P}(0 \text{ érkezés } [c,b]\text{-ben}) =$$
$$\frac{(\lambda(c-a))^1}{1!} e^{-\lambda(c-a)} \cdot \frac{(\lambda(b-c))^0}{0!} e^{-\lambda(b-c)} = \lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)}.$$

Tehát

$$\mathbb{P}(B) = \lambda(b-a)e^{-\lambda(b-a)},$$
$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)},$$

Intervallumon belüli helyzet

Tehát

$$\mathbb{P}(B) = \lambda(b-a)e^{-\lambda(b-a)},$$
$$\mathbb{P}(A \text{ és } B) = \lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)},$$

ahonnan

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ és } B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\lambda(c-a)e^{-\lambda(b-a)}}{\lambda(b-a)e^{-\lambda(b-a)}} = \frac{c-a}{b-a},$$

ami pontosan annak a valószínűsége, hogy egy $\mathrm{U}([a,b])$ valószínűségi változó értéke $[a,c]$-be esik.

Intervallumon belüli helyzet

A következő általánosabb tétel is igaz.

Tétel

Feltéve, hogy egy PPP(λ)-nak k érkezése van az $[a, b]$ intervallumban, azok együttes eloszlása megegyezik k darab független $U([a, b])$ valószínűségi változó együttes eloszlásával.

A következő általánosabb tétel is igaz.

Tétel

Feltéve, hogy egy PPP(λ)-nak k érkezése van az $[a, b]$ intervallumban, azok együttes eloszlása megegyezik k darab független $U([a, b])$ valószínűségi változó együttes eloszlásával.

Nem biz. (Az előzőhöz hasonló számolás.)

Összefoglaló (az eddigiekről)

A PPP(λ)-ra a következők teljesülnek:

- az érkezési időközök EXP(λ) eloszlásúak és függetlenek;
- az $[a, b]$-ba eső érkezések száma POI($\lambda(b-a)$) eloszlású;
- diszjunkt intervallumokban az érkezések száma független;
- független PPP-k uniója is PPP, a ráták összeadódnak;
- egy PPP szétszedhető két független PPP-re úgy, hogy minden érkezés a többitől függetlenül kerül egyik vagy másik PPP-be;
- feltéve, hogy egy intervallumba k pont esik, az együttes eloszlásuk az intervallumon belül független egyenletes.

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Legyen adott egy PPP(λ) a $[0, \infty)$-en; az érkezési időközök listája $\tau_1, \tau_2, \dots$.

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Legyen adott egy PPP(λ) a $[0, \infty)$-en; az érkezési időközök listája $\tau_1, \tau_2, \ldots$.

Ez kiterjeszthető a teljes számegyenesre a következő módon.
Legyen $\tau_{-1}, \tau_{-2}, \ldots$ fae EXP(λ) változók, függetlenek egymástól és $\tau_1, \tau_2, \ldots$-től.
A $[-\infty, 0]$-beli érkezések időpontjai legyenek

$$\begin{aligned}
T_{-1} &= -\tau_{-1}, \\
T_{-2} &= -(\tau_{-1} + \tau_{-2}), \\
T_{-3} &= -(\tau_{-1} + \tau_{-2} + \tau_{-3}), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

A 0-t tartalmazó szakasz $[-\tau_{-1}, \tau_1]$, hossza $\tau_{-1} + \tau_1$, melynek várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_{-1} + \tau_1) = 2\mathbb{E}(\tau_1) = \frac{2}{\lambda}.$$

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

A 0-t tartalmazó szakasz $[-\tau_{-1}, \tau_1]$, hossza $\tau_{-1} + \tau_1$, melynek várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_{-1} + \tau_1) = 2\mathbb{E}(\tau_1) = \frac{2}{\lambda}.$$

Másrészt minden más érkezési időköz várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_i) = \mathbb{E}(\tau_{-i}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Kiterjesztés a teljes számegyenesre

Az érkezések felosztják a számegyenest véletlen hosszúságú szakaszokra. Számítsuk ki a 0-t tartalmazó szakasz hosszának várható értékét.

A 0-t tartalmazó szakasz $[-\tau_{-1}, \tau_1]$, hossza $\tau_{-1} + \tau_1$, melynek várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_{-1} + \tau_1) = 2\mathbb{E}(\tau_1) = \frac{2}{\lambda}.$$

Másrészt minden más érkezési időköz várható értéke

$$\mathbb{E}(\tau_i) = \mathbb{E}(\tau_{-i}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Tehát a 0-t tartalmazó szakasz átlagosan kétszer olyan hosszú lenne, mint a többi szakasz?

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak.

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak. (Ez egyébként a 0 helyett bármelyik másik pontra is igaz.)

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak. (Ez egyébként a 0 helyett bármelyik másik pontra is igaz.)

Annak a valószínűsége, hogy egy pont egy adott hosszúságú intervallumba esik, arányos az intervallum hosszával is.

Kitérő: hossztorzítás

Bizony ám! Ennek oka az, hogy a 0 nagyobb eséllyel esik egy hosszabb szakaszba (egyszerűen azért, mert hosszabb). Másképp mondva "a 0-t tartalmazó szakasz hossza" és "egy érkezési időköz hossza" különböző eloszlásúak. (Ez egyébként a 0 helyett bármelyik másik pontra is igaz.)

Annak a valószínűsége, hogy egy pont egy adott hosszúságú intervallumba esik, arányos az intervallum hosszával is. Azaz ha az érkezési időköz sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor a 0-t tartalmazó szakasz hosszának sűrűségfüggvénye

$$\tilde{f}(x) = \frac{xf(x)}{\mathbb{E}(\tau_1)}.$$

(Az $\mathbb{E}(\tau_1)$-gyel való osztás csak normalizálás miatt kell.)

Úgy mondjuk, hogy az $\tilde{f}(x)$ sűrűségfüggvény az $f(x)$ sűrűségfüggvény *hossztorzított változata*.

Kitérő: hossztorzítás

Konkrétan ha $\tau_1 \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad \tilde{f}(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}.$$

A fenti $\tilde{f}(x)$ sűrűségfüggvény a Gamma(2,λ), vagy más néven Erlang(2,λ) eloszlás sűrűségfüggvénye. Azon túl, hogy ez az eloszlás az EXP(λ) hossztorzított változata, egyúttal teljesül rá az is, hogy

$$\tau_1 + \tau_{-1} \sim \mathrm{Erlang}(2, \lambda),$$

ha τ_1 és τ_{-1} független EXP(λ) eloszlásúak.

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

- Kiválasztunk egy családot véletlenszerűen, és megkérdezzük, hány gyermekük van.
- Kiválasztunk egy gyereket véletlenszerűen, és megkérdezzük, hányan vannak testvérek összesen.

Kitérő: hossztorzítás

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

- Kiválasztunk egy családot véletlenszerűen, és megkérdezzük, hány gyermekük van.
- Kiválasztunk egy gyereket véletlenszerűen, és megkérdezzük, hányan vannak testvérek összesen.

A második esetben a gyerek nagyobb eséllyel jön sokgyerekes családból. A második kérdésre a válasz pont az első kérdésre adott válasz hossztorzított változata.

Kitérő: hossztorzítás

Egyéb példák hossztorzításra.

Példa. Kíváncsiak vagyunk a gyerekek számának eloszlására családonként egy társadalomban. Tekintsük a következő helyzeteket:

- Kiválasztunk egy családot véletlenszerűen, és megkérdezzük, hány gyermekük van.
- Kiválasztunk egy gyereket véletlenszerűen, és megkérdezzük, hányan vannak testvérek összesen.

A második esetben a gyerek nagyobb eséllyel jön sokgyerekes családból. A második kérdésre a válasz pont az első kérdésre adott válasz hossztorzított változata.

Diszkrét valószínűségi változók esetén a hossztorzítás képlete:

$$\mathbb{P}(\tilde{X} = k) = \frac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}(X)}.$$

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

Egy megállóban átlagosan 10 percenként jön a busz. Várhatóan mennyit kell várnunk, ha egy véletlen időpontban odamegyünk a buszmegállóba?

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

Egy megállóban átlagosan 10 percenként jön a busz. Várhatóan mennyit kell várnunk, ha egy véletlen időpontban odamegyünk a buszmegállóba?

A természetes válasz 5 perc lenne, de ez csak akkor igaz, ha a buszok pontosan 10 percenként követik egymást.

Kitérő: hossztorzítás

A következő példa a várakozási idő paradoxon.

Egy megállóban átlagosan 10 percenként jön a busz. Várhatóan mennyit kell várnunk, ha egy véletlen időpontban odamegyünk a buszmegállóba?

A természetes válasz 5 perc lenne, de ez csak akkor igaz, ha a buszok pontosan 10 percenként követik egymást.

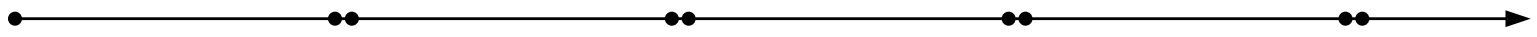
Ha azonban az érkezési időközök véletlenek, akkor vannak hosszabb és rövidebb időközök, és mi nagyobb eséllyel érkezünk egy hosszabb időközbe.

Kitérő: hossztorzítás

Ha konkrétan a buszok úgy járnak, hogy két egymást követő busz jön 1 percen belül, majd 19 perces szünet, és ez a minta ismétlődik:

Kitérő: hossztorzítás

Ha konkrétan a buszok úgy járnak, hogy két egymást követő busz jön 1 percen belül, majd 19 perces szünet, és ez a minta ismétlődik:



Ekkor 95% eséllyel a hosszú időközbe érkezünk, ahol átlagosan 9:30 percet kell várnunk. Mindenestül az átlagos várakozási idő

$$0.95 \times 9{:}30 + 0.05 \times 0{:}30 = 9{:}03$$

perc, ami jelentősen több, mint 5 perc.

Kitérő: hossztorzítás

Sorbanállási helyzetekben is előjön: boltban, bankban stb.

Kitérő: hossztorzítás

Sorbanállási helyzetekben is előjön: boltban, bankban stb.

Gyakran tűnhet úgy, hogy az a sor, amiben állunk, lassabban halad, mint a többi.

Kitérő: hossztorzítás

Sorbanállási helyzetekben is előjön: boltban, bankban stb.

Gyakran tűnhet úgy, hogy az a sor, amiben állunk, lassabban halad, mint a többi.

És tényleg ez a helyzet: átlagosan több időt töltünk lassabb sorokban, pont azért, mert lassabbak.

Ezt a jelenséget úgy is lehet értelmezni, hogy a sorok sebessége *kívülről nézve* más eloszlást követ, mint egy adott sorból *belülről nézve*.

A Poisson-folyamat szimulálható a $[0, t]$ intervallumon úgy, hogy a $\tau_1, \tau_2, \ldots$ érkezési időközöket generáljuk függetlenül, $\mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlás szerint. Ekkor az érkezési idők

$$\begin{aligned} T_1 &= \tau_1, \\ T_2 &= \tau_1 + \tau_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Elég annyi τ_n-et generálni, amíg $T_n \geq t$-t el nem érjük.

Egy másik lehetőség, hogy egy adott intervallumon először a darabszámot generáljuk le, majd azok helyzetét az intervallumon belül.

Az $[a, b]$ intervallumba eső pontok száma $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b-a))$. Legeneráljuk először X értékét.

Szimuláció II - Poisson és egyenletes változókkal

Egy másik lehetőség, hogy egy adott intervallumon először a darabszámot generáljuk le, majd azok helyzetét az intervallumon belül.

Az $[a, b]$ intervallumba eső pontok száma $X \sim \mathrm{POI}(\lambda(b-a))$. Legeneráljuk először X értékét.

Ezután generálunk X darab független pontot $\mathrm{U}([a, b])$ eloszlás szerint.

Mikor jogos a PPP használata?

Általában a Poisson pontfolyamat használata jogos, ha a következő két feltétel teljesül:

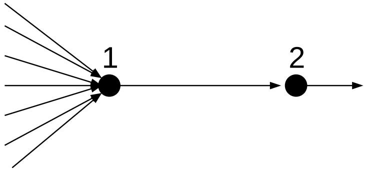
- az érkezések sok független forrásból érkeznek, és
- mindegyik forrás kontribúciója az egészhez képest kicsi.

Mikor jogos a PPP használata?

Általában a Poisson pontfolyamat használata jogos, ha a következő két feltétel teljesül:

- az érkezések sok független forrásból érkeznek, és
- mindegyik forrás kontribúciója az egészhez képest kicsi.

Példa. Az alábbi hálózatban az 1-es szerver esetén a PPP használata jogos, de a 2-es szervernél nem.



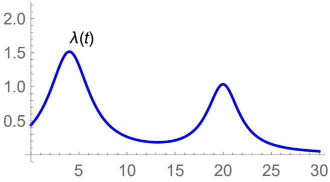
Inhomogén Poisson pontfolyamat

Vannak esetek, amikor az érkezési ráta nem állandó, hanem időben változik. Ilyen helyzetre példa a közlekedés: csúcsidőben az érkezési ráta magasabb, azon kívül viszont alacsonyabb.

Inhomogén Poisson pontfolyamat

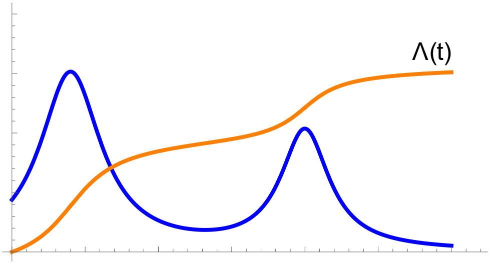
Vannak esetek, amikor az érkezési ráta nem állandó, hanem időben változik. Ilyen helyzetre példa a közlekedés: csúcsidőben az érkezési ráta magasabb, azon kívül viszont alacsonyabb.

Szeretnénk definiálni olyan Poisson folyamatot, melyre az érkezések egy időben változó $\lambda(t) \geq 0$ rátafüggvény szerint történnek.



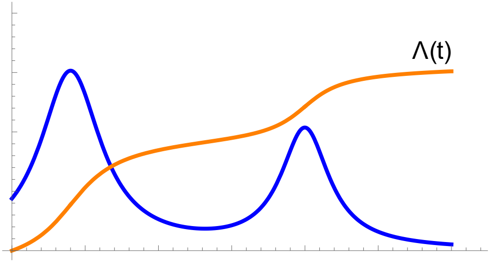
Ezt a következő módon csináljuk. Legyen

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\mathrm{d}s.$$

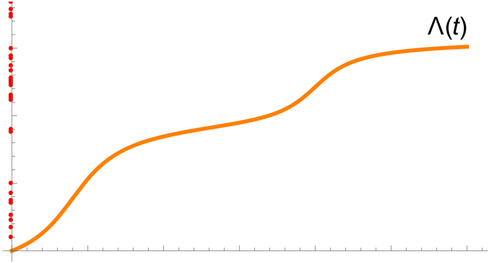


Inhomogén Poisson pontfolyamat

$\Lambda(t)$ növő függvény és a 0-ból indul; amikor $\lambda(t)$ nagyobb, $\Lambda(t)$ gyorsabban nő, amikor $\lambda(t)$ kisebb, $\Lambda(t)$ lassabban nő.

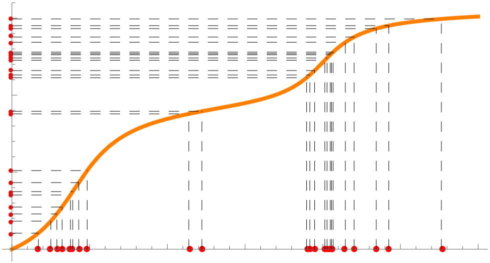


Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ egy PPP(1) érkezései $[0, \infty)$-en. (A grafikonon az y tengely mentén ábrázoltuk őket.)

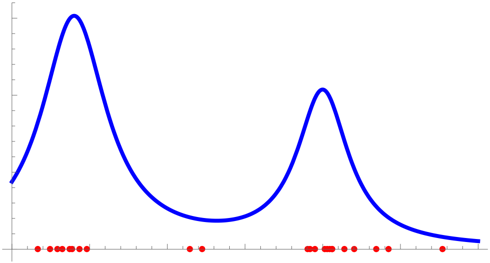


Inhomogén Poisson pontfolyamat

Ekkor a $\Lambda^{-1}(Y_1), \Lambda^{-1}(Y_2), \ldots$ pontok egy $\lambda(t)$ rátafüggvénynek megfelelő inhomogén Poisson folyamatot alkotnak. (Az ábrán le vannak vetítve az x tengelyre a $\Lambda(t)$ függvény grafikonján keresztül.)



A kapott folyamatnak tipikusan több érkezése van ott, ahol $\lambda(t)$ nagyobb, és kevesebb ott, ahol $\lambda(t)$ kisebb.



Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;
- ✓ az érkezések száma diszjunkt intervallumokban független;

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;
- ✓ az érkezések száma diszjunkt intervallumokban független;
- × az érkezési időközök nem exponenciális eloszlásúak;

Inhomogén Poisson pontfolyamat

Az inhomogén Poisson folyamat tulajdonságai:

- ✓ az érkezések száma $[a, b]$-ben $\mathrm{POI}\left(\int_a^b \lambda(t)\mathrm{d}t\right)$ eloszlású;
- ✓ az érkezések száma diszjunkt intervallumokban független;
- × az érkezési időközök nem exponenciális eloszlásúak;
- × az érkezési időközök nem függetlenek.

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

- egy A területű tartományban a pontok számának eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda A)$;

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

- egy A területű tartományban a pontok számának eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda A)$;
- feltéve, hogy k pont esik a tartományba, az együttes eloszlásuk független egyenletes a tartományon belül;

2-dimenziós PPP

A Poisson folyamat általánosítható magasabb dimenziókra is.

Példa. A 2-dimenziós Poisson folyamattal lehet modellezni fák elhelyezkedését egy erdőben.

Egy 2-dimenziós Poisson folyamatban az érkezések (pontok) $\mathbb{R}^2$-ben vannak. A λ ráta a pontok sűrűségét adja meg (azaz a pontok átlagos számát egységnyi területen). Az érkezési időköznek nincs megfelelője, de a Poisson eloszlással való szimuláció működik:

- egy A területű tartományban a pontok számának eloszlása $\mathrm{POI}(\lambda A)$;
- feltéve, hogy k pont esik a tartományba, az együttes eloszlásuk független egyenletes a tartományon belül;
- egyenletes eloszlást könnyű generálni pl. téglalapokon.

1. feladat

Egy telefonközpontba 5 perc alatt átlagosan 8 helyi hívás és 2 távolsági hívás érkezik.

(a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik?

(b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy 2 perc alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?

(c) Mekkora a feltételes valószínűsége annak, hogy egy 2 perces időszak alatt pontosan 1 távolsági hívás érkezik, feltéve, hogy ugyanezen idő alatt legfeljebb 3 hívás érkezik összesen?

(d) Mi az eloszlása és várható értéke az aznapi első helyi hívásig eltelt időnek?

(e) Mi az eloszlása és várható értéke az aznapi első hívásig eltelt időnek?

(f) Mekkora az esélye, hogy az első hívás helyi?

Megoldás.

(a) A távolsági hívások PPP $2/5 = 0.4$ rátával (hívás per perc), így ha X a hívások száma egy 2 perces időszak alatt, akkor

$$X \sim \mathrm{POI}(0.4 \times 2) = \mathrm{POI}(0.8),$$

1. feladat

Megoldás.

(a) A távolsági hívások PPP $2/5 = 0.4$ rátával (hívás per perc), így ha X a hívások száma egy 2 perces időszak alatt, akkor

$$X \sim \mathrm{POI}(0.4 \times 2) = \mathrm{POI}(0.8),$$

és

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{0.8^1}{1!} e^{-0.8} \approx 0.359.$$

(b) Az unió tétel alapján az összes hívás Poisson folyamat $10/5 = 2$ rátával, így ha Y a hívások száma 2 perc alatt, akkor

$$Y \sim \mathrm{POI}(2 \times 2) = \mathrm{POI}(4),$$

1. feladat

(b) Az unió tétel alapján az összes hívás Poisson folyamat $10/5 = 2$ rátával, így ha Y a hívások száma 2 perc alatt, akkor

$$Y \sim \mathrm{POI}(2 \times 2) = \mathrm{POI}(4),$$

és

$$\mathbb{P}(Y \leq 3) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} + \frac{4^3}{3!}e^{-4} \approx 0.433.$$

(c) Ugyanazzal a jelöléssel a kérdés

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y \leq 3) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 3)}{\mathbb{P}(Y \leq 3)}.$$

(c) Ugyanazzal a jelöléssel a kérdés

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y \leq 3) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 3)}{\mathbb{P}(Y \leq 3)}.$$

$\mathbb{P}(Y \leq 3)$ értékét már kiszámítottuk a (b) kérdésnél.

(c) Ugyanazzal a jelöléssel a kérdés

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y \leq 3) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 3)}{\mathbb{P}(Y \leq 3)}.$$

$\mathbb{P}(Y \leq 3)$ értékét már kiszámítottuk a (b) kérdésnél.

$\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 3)$ kiszámításánál arra figyeljünk, hogy X és Y nem függetlenek, mivel Y tartalmazza az X darab távolsági hívást is.

(c) Ugyanazzal a jelöléssel a kérdés

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y \leq 3) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 3)}{\mathbb{P}(Y \leq 3)}.$$

$\mathbb{P}(Y \leq 3)$ értékét már kiszámítottuk a (b) kérdésnél.

$\mathbb{P}(X = 1, Y \leq 3)$ kiszámításánál arra figyeljünk, hogy X és Y nem függetlenek, mivel Y tartalmazza az X darab távolsági hívást is. Legyen

$$Y = X + Z,$$

ahol Z a helyi hívások száma ugyanazon 2 perces intervallum alatt. $Z \sim \mathrm{POI}(8/5 \times 2 = 3.2)$, és független X-től.

(c) Ekkor

$$\mathbb{P}(X=1, Y\leq 3) = \mathbb{P}(X=1, Z\leq 2) = \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Z\leq 2) = \frac{0.8^1}{1!}e^{-0.8}\cdot\left(\frac{3.2^0}{0!}e^{-3.2}+\frac{3.2^1}{1!}e^{-3.2}+\frac{3.2^2}{2!}e^{-3.2}\right)\approx 0.137,$$

és

$$\mathbb{P}(X=1|Y\leq 3) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y\leq 3)}{\mathbb{P}(Y\leq 3)} = \frac{\frac{0.8^1}{1!}e^{-0.8}\cdot\left(\frac{3.2^0}{0!}e^{-3.2}+\frac{3.2^1}{1!}e^{-3.2}+\frac{3.2^2}{2!}e^{-3.2}\right)}{\frac{4^0}{0!}e^{-4}+\frac{4^1}{1!}e^{-4}+\frac{4^2}{2!}e^{-4}+\frac{4^3}{3!}e^{-4}}\approx 0.315.$$

(d) A helyi hívások PPP(8/5)-öt alkotnak, tehát az érkezési időközök EXP(8/5) eloszlásúak, ennek a várható értéke 5/8. Ennyit kell átlagosan várni az első helyi hívásra.

(d) A helyi hívások PPP(8/5)-öt alkotnak, tehát az érkezési időközök EXP(8/5) eloszlásúak, ennek a várható értéke 5/8. Ennyit kell átlagosan várni az első helyi hívásra.

(e) Az összes hívások folyamata PPP(10/5), tehát az érkezési időközök EXP(10/5) eloszlásúak, ennek a várható értéke 5/10. Ennyit kell átlagosan várni az első bármilyen hívásra.

1. feladat

(d) A helyi hívások PPP(8/5)-öt alkotnak, tehát az érkezési időközök EXP(8/5) eloszlásúak, ennek a várható értéke 5/8. Ennyit kell átlagosan várni az első helyi hívásra.

(e) Az összes hívások folyamata PPP(10/5), tehát az érkezési időközök EXP(10/5) eloszlásúak, ennek a várható értéke 5/10. Ennyit kell átlagosan várni az első bármilyen hívásra.

(f) A ritkítás tétel szerint minden egyes hívás helyi 8/10 valószínűséggel, a többi hívástól függetlenül.

4. feladat

Egy szerverhez A és B típusú csomagok érkeznek, másodpercenként átlagosan 1 A típusú és 1.5 B típusú.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy az első érkező csomag A típusú?

(b) Jelölje X az első A típusú csomag előtt érkező B típusú csomagok számát. Milyen eloszlású X?

(c) Legyen T mindentől független EXP(0.5) eloszlású, és legyen Y a T idő alatt érkező A típusú csomagok száma. Számítsuk ki Y várható értékét. Adjuk meg a teljes eloszlását is.

4. feladat

Megoldás.

(a) Minden csomag a többitől függetlenül $\frac{1}{1+1.5} = 0.4$ valószínűséggel A típusú, így 0.4 a valószínűsége annak is, hogy az első érkező csomag A típusú.

4. feladat

Megoldás.

(a) Minden csomag a többitől függetlenül $\frac{1}{1+1.5} = 0.4$ valószínűséggel A típusú, így 0.4 a valószínűsége annak is, hogy az első érkező csomag A típusú.

(b) Sorban jönnek a csomagok, tekintsünk mindegyikre úgy, mint egy próbálkozás, hogy B típusú csomag jöjjön. Ekkor a „sikertelen próbálkozások" pont az A típusú csomagok; a számuk eloszlása az első sikeres (B típusú csomag) előtt PGEO(0.6) eloszlású.

4. feladat

Megoldás.

(a) Minden csomag a többitől függetlenül $\frac{1}{1+1.5} = 0.4$ valószínűséggel A típusú, így 0.4 a valószínűsége annak is, hogy az első érkező csomag A típusú.

(b) Sorban jönnek a csomagok, tekintsünk mindegyikre úgy, mint egy próbálkozás, hogy B típusú csomag jöjjön. Ekkor a „sikertelen próbálkozások" pont az A típusú csomagok; a számuk eloszlása az első sikeres (B típusú csomag) előtt PGEO(0.6) eloszlású.

(c) Toronyszabály alapján:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|T)) = \mathbb{E}(T) = 1/0.5 = 2.$$

4. feladat

Megoldás.

(a) Minden csomag a többitől függetlenül $\frac{1}{1+1.5} = 0.4$ valószínűséggel A típusú, így 0.4 a valószínűsége annak is, hogy az első érkező csomag A típusú.

(b) Sorban jönnek a csomagok, tekintsünk mindegyikre úgy, mint egy próbálkozás, hogy B típusú csomag jöjjön. Ekkor a „sikertelen próbálkozások” pont az A típusú csomagok; a számuk eloszlása az első sikeres (B típusú csomag) előtt PGEO(0.6) eloszlású.

(c) Toronyszabály alapján:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|T)) = \mathbb{E}(T) = 1/0.5 = 2.$$

Vezessünk be „fantom” érkezéseket 0.5 rátával, függetlenül az eredeti folyamattól. Ekkor a T hosszú intervallum felfogható úgy is, mint az első fantom érkezés ideje. Az A típusú csomagok száma az első fantom érkezés előtt $\text{PGEO}(0.5/(1+0.5) = 1/3)$ eloszlású.

6. feladat

Ottó autójának két fényszórója van (bal és jobb). A bal fényszóró átlagosan kétévente egyszer romlik el, a jobb fényszóró viszont egy gyártási hiba miatt átlagosan 8 havonta romlik el.

(a) Átlagosan milyen gyakran romlik el valamelyik fényszóró?

(b) Mekkora az esélye, hogy a fényszórók végig hibátlanul üzemelnek a tél folyamán? (A tél 3 hónap.)

(c) Mekkora az esélye, hogy a következő két fényszóró meghibásodás mindkettő a bal oldali fényszórón történik?

Megoldás.

(a) A baloldali fényszóró elromlási rátája $1/2$ (alkalom/év), a jobboldali fényszóróé $3/2$ alkalom/év. Így annak a rátája, hogy valamelyik fényszóró elromlik, 2/év, azaz átlagosan félévente romlik el valamelyik fényszóró.

6. feladat

Megoldás.

(a) A baloldali fényszóró elromlási rátája $1/2$ (alkalom/év), a jobboldali fényszóróé $3/2$ alkalom/év. Így annak a rátája, hogy valamelyik fényszóró elromlik, 2/év, azaz átlagosan félévente romlik el valamelyik fényszóró.

(b) Legyen X az elromlások száma a tél alatt.
$X \sim \mathrm{POI}(1/4 \cdot 2 = 2)$, így

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} \approx 0.135.$$

6. feladat

Megoldás.

(a) A baloldali fényszóró elromlási rátája $1/2$ (alkalom/év), a jobboldali fényszóróé $3/2$ alkalom/év. Így annak a rátája, hogy valamelyik fényszóró elromlik, 2/év, azaz átlagosan félévente romlik el valamelyik fényszóró.

(b) Legyen X az elromlások száma a tél alatt. $X \sim \mathrm{POI}(1/4 \cdot 2 = 2)$, így

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} \approx 0.135.$$

Másik megoldás. Legyen T az első elromlás ideje a tél kezdetétől. Ekkor $T \sim \mathrm{EXP}(2)$, és

$$\mathbb{P}(T > 1/4) = 1 - F(1/4) = 1 - (1 - e^{-2 \cdot 1/4}) = e^{-2} \approx 0.135.$$

Megoldás.

(c) A meghibásodások rátáinak aránya: bal:jobb $= (1/2) : (3/2)$, azaz minden meghibásodás a többitől függetlenül $\frac{1/2}{1/2+3/2} = \frac{1}{4}$ eséllyel következik be a baloldali fényszórón.

6. feladat

Megoldás.

(c) A meghibásodások rátáinak aránya: bal:jobb $= (1/2) : (3/2)$, azaz minden meghibásodás a többitől függetlenül $\frac{1/2}{1/2+3/2} = \frac{1}{4}$ eséllyel következik be a baloldali fényszórón.

Annak a valószínűsége, hogy a következő 2 meghibásodás mindkettő a bal oldalon következik be,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

8. feladat

Egy 200 oldalas kéziratban átlagosan 3 helyesírási huba van oldalanként. A korrektor minden egyes hibát 90% eséllyel vesz észre; a megtalált hibákat megjelöli.

(a) Várhatóan hány hiba marad a kéziratban, miután kijavítják a korrektor által megtalált hibákat?

(b) Mekkora az esélye, hogy a korrektor egy oldalon az összes hibát megtalálja?

(c) Feltéve, hogy egy oldalon 3 hiba van, mekkora az esélye, hogy mindhárom az oldal alsó felén van?

8. feladat

Megoldás.

(a) Az összes hibák folyamata PPP 3 hiba per oldal rátával, és a ritkítás miatt a megmaradó hibák egy PPP $3 \times 0.1 = 0.3$ rátával.

Megoldás.

(a) Az összes hibák folyamata PPP 3 hiba per oldal rátával, és a ritkítás miatt a megmaradó hibák egy PPP $3 \times 0.1 = 0.3$ rátával.

Az összes megmaradó hibák száma 200 oldalon $\mathrm{POI}(200 \times 0.3 = 60)$ eloszlású, melynek várható értéke 60.

8. feladat

Megoldás.

(a) Az összes hibák folyamata PPP 3 hiba per oldal rátával, és a ritkítás miatt a megmaradó hibák egy PPP $3 \times 0.1 = 0.3$ rátával.

Az összes megmaradó hibák száma 200 oldalon $\mathrm{POI}(200 \times 0.3 = 60)$ eloszlású, melynek várható értéke 60.

(b) Az, hogy a korrektor az összes hibát megtalálja egy oldalon, ekvivalens azzal, hogy 0 hiba maradt. A megmaradó hibák száma egy oldalon $X \sim \mathrm{POI}(0.3)$ eloszlású, és

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{0.3^0}{0!} e^{-0.3} \approx 0.741.$$

8. feladat

Megoldás.

(a) Az összes hibák folyamata PPP 3 hiba per oldal rátával, és a ritkítás miatt a megmaradó hibák egy PPP $3 \times 0.1 = 0.3$ rátával.

Az összes megmaradó hibák száma 200 oldalon $\mathrm{POI}(200 \times 0.3 = 60)$ eloszlású, melynek várható értéke 60.

(b) Az, hogy a korrektor az összes hibát megtalálja egy oldalon, ekvivalens azzal, hogy 0 hiba maradt. A megmaradó hibák száma egy oldalon $X \sim \mathrm{POI}(0.3)$ eloszlású, és

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{0.3^0}{0!} e^{-0.3} \approx 0.741.$$

(c) Feltéve, hogy 3 hiba van, azok helyzete az oldalon belül független egyenletes, így annak az esélye, hogy mindhárom az oldal alsó felén van, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

9. feladat

Egy erdőben átlagosan 100 négyzetméterenként 10 fa nő. A fák törzsét a talajszinthez képest 2 méteres magasságig tekintsük 20 cm átmérőjű hengereknek.

(a) Mekkora az esélye, hogy egy 10 négyzetméteres területen egyetlen fa sem nő?

(b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen irányba kilőtt puskagolyó legalább 50 métert repül anélkül, hogy fának ütközne?

Egy erdőben átlagosan 100 négyzetméterenként 10 fa nő. A fák törzsét a talajszinthez képest 2 méteres magasságig tekintsük 20 cm átmérőjű hengereknek.

(a) Mekkora az esélye, hogy egy 10 négyzetméteres területen egyetlen fa sem nő?

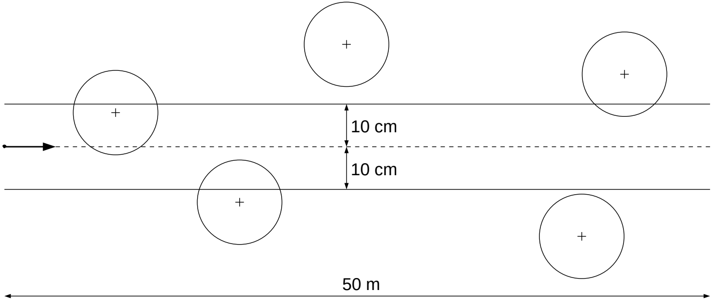
(b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen irányba kilőtt puskagolyó legalább 50 métert repül anélkül, hogy fának ütközne?

Megoldás.

(a) A fák középpontjai 2-dimenziós Poisson folyamat $10/100 = 0.1$ fa per m^2 rátával, így a fák száma egy $10\mathrm{m}^2$-es területen $X \sim \mathrm{POI}(10\mathrm{m}^2 \times 0.1\frac{1}{\mathrm{m}^2} = 1)$, és

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1^0}{0!}e^{-1} \approx 0.368.$$

(b) A puskagolyó akkor talál el egy fát, ha a fa középpontja 10 cm-nél közelebb van a golyó pályájához, mivel a fák sugara 10 cm.



(b) Ez egy 50m $\times$ 20cm-es sávot jelent a golyó pályája mentén; a golyó pontosan akkor fog legalább 50 métert repülni, ha ez a sáv nem tartalmaz egy fa középpontot sem.

(b) Ez egy 50m $\times$ 20cm-es sávot jelent a golyó pályája mentén; a golyó pontosan akkor fog legalább 50 métert repülni, ha ez a sáv nem tartalmaz egy fa középpontot sem.

A sáv területe 50m $\times$ 20cm $=$ 10m^2, így a beleeső fa középpontok száma $X \sim \mathrm{POI}(10\mathrm{m}^2 \times 0.1\frac{1}{\mathrm{m}^2} = 1)$, és

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1^0}{0!}e^{-1} \approx 0.368$$

(ahogy az (a) részben kiszámoltuk).

10. feladat

Egy úton az elhaladó kamionokat számoljuk. A kamionforgalom sűrűsége napközben nem állandó, az óránként elhaladó kamionok számának rátafüggvénye a következő:

$$r(x) = 6 - 4\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) \qquad x \in [0, 24]$$

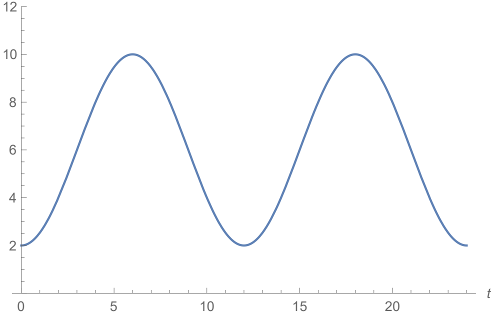
(a) Ábrázoljuk a rátafüggvényt. Hol van maximuma?

(b) Mekkora az egy nap alatt elhaladó kamionok számának várható értéke?

(c) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 12 és 13 óra között pontosan 3 kamion halad el?

Megoldás.

(a) Ez egy inhomogén Poisson folyamat. A ráta függvény 2 és 10 között változik, maximuma $t = 6$-nál és $t = 18$-nál van.



(b) Az egy nap alatt elhaladó összes kamionok száma

$$X \sim \mathrm{POI}\left(\int_0^{24} \lambda(t)\mathrm{d}t = 144\right),$$

aminek a várható értéke 144.

(b) Az egy nap alatt elhaladó összes kamionok száma

$$X \sim \text{POI}\left(\int_0^{24} \lambda(t)\mathrm{d}t = 144\right),$$

aminek a várható értéke 144.

(b) A 12:00 és 13:00 között elhaladó kamionok száma

$$Y \sim \text{POI}\left(\int_{12}^{13} \lambda(t)\mathrm{d}t = 4 - \frac{3}{\pi} \approx 3.045\right),$$

és

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \frac{\left(4 - \frac{3}{\pi}\right)^3}{3!} e^{4 - \frac{3}{\pi}} \approx 0.224.$$