Koncentrációs tételek

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/11/05

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású (fae) valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

összeg viselkedésére vagyunk kíváncsiak.

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású (fae) valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

összeg viselkedésére vagyunk kíváncsiak.

Példák:

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású (fae) valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

összeg viselkedésére vagyunk kíváncsiak.

Példák:

- A fejek száma 1000 érmedobásból (minden X_i 0 vagy 1).

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású (fae) valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

összeg viselkedésére vagyunk kíváncsiak.

Példák:

- A fejek száma 1000 érmedobásból (minden X_i 0 vagy 1).
- 1000 kockadobás összege (minden X_i $1, 2, \ldots, 6$ valamelyike egyforma $1/6$ valószínűséggel).

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású (fae) valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

összeg viselkedésére vagyunk kíváncsiak.

Példák:

- A fejek száma 1000 érmedobásból (minden X_i 0 vagy 1).
- 1000 kockadobás összege (minden X_i $1, 2, \ldots, 6$ valamelyike egyforma $1/6$ valószínűséggel).
- A napi összes háztartási szemét mennyisége egy városban.

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású (fae) valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

összeg viselkedésére vagyunk kíváncsiak.

Példák:

- A fejek száma 1000 érmedobásból (minden X_i 0 vagy 1).
- 1000 kockadobás összege (minden X_i $1, 2, \ldots, 6$ valamelyike egyforma $1/6$ valószínűséggel).
- A napi összes háztartási szemét mennyisége egy városban.
- Közös csatornát használó felhasználók együttes sávszélesség-igénye.

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású (fae) valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

összeg viselkedésére vagyunk kíváncsiak.

Példák:

- A fejek száma 1000 érmedobásból (minden X_i 0 vagy 1).
- 1000 kockadobás összege (minden X_i $1, 2, \ldots, 6$ valamelyike egyforma $1/6$ valószínűséggel).
- A napi összes háztartási szemét mennyisége egy városban.
- Közös csatornát használó felhasználók együttes sávszélesség-igénye.

S_n viselkedésének leírása segít valós problémák elemzésében és méretezésében.

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Néhány speciális esetben S_n eloszlása pontosan megadható:

- ha $X_1 \sim \mathrm{BIN}(k, p)$, akkor $S_n \sim \mathrm{BIN}(kn, p)$;
- ha $X_1 \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor $S_n \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$;
- ha $X_1 \sim \mathrm{N}(m, \sigma)$, akkor $S_n \sim \mathrm{N}(mn, \sigma\sqrt{n})$.

Általában azonban S_n pontos eloszlását kiszámítani nagy n esetén nehéz.

Független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegei

Néhány speciális esetben S_n eloszlása pontosan megadható:

- ha $X_1 \sim \mathrm{BIN}(k, p)$, akkor $S_n \sim \mathrm{BIN}(kn, p)$;
- ha $X_1 \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$, akkor $S_n \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$;
- ha $X_1 \sim \mathrm{N}(m, \sigma)$, akkor $S_n \sim \mathrm{N}(mn, \sigma\sqrt{n})$.

Általában azonban S_n pontos eloszlását kiszámítani nagy n esetén nehéz.

Ezért becsléseket és korlátokat szeretnénk adni S_n eloszlására. (Amik egyébként akár még akkor is hasznosak, ha S_n pontos eloszlása ismert.)

Példa

Egy szabályos hatoldalú kockával dobunk 100-szor és a dobásokat összeadjuk. Néhány realizáció:

$$344, 333, 330, 335, 369, 375, 335, 371, 339, 331$$

Példa

Egy szabályos hatoldalú kockával dobunk 100-szor és a dobásokat összeadjuk. Néhány realizáció:

$$344, 333, 330, 335, 369, 375, 335, 371, 339, 331$$

1000 dobás összegére néhány realizáció:

$$3415, 3520, 3494, 3572, 3627, 3420, 3584, 3527, 3447, 3561$$

Példa

Egy szabályos hatoldalú kockával dobunk 100-szor és a dobásokat összeadjuk. Néhány realizáció:

$$344, 333, 330, 335, 369, 375, 335, 371, 339, 331$$

1000 dobás összegére néhány realizáció:

$$3415, 3520, 3494, 3572, 3627, 3420, 3584, 3527, 3447, 3561$$

10000 dobás összegére néhány realizáció:

$$34669, 34947, 35138, 34808, 34965, 34973, 35004, 35089, 34718, 34513$$

Példa

Egy szabályos hatoldalú kockával dobunk 100-szor és a dobásokat összeadjuk. Néhány realizáció:

$$344, 333, 330, 335, 369, 375, 335, 371, 339, 331$$

1000 dobás összegére néhány realizáció:

$$3415, 3520, 3494, 3572, 3627, 3420, 3584, 3527, 3447, 3561$$

10000 dobás összegére néhány realizáció:

$$34669, 34947, 35138, 34808, 34965, 34973, 35004, 35089, 34718, 34513$$

100000 dobás összegére néhány realizáció:

$$349069, 350218, 350320, 350811, 349624,$$
$$349708, 348633, 350351, 350343, 349698$$

Nagy számok törvénye

Tétel. (Nagy számok törvénye (NSzT))

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *fae valószínűségi változók* $\mathbb{E}(X_i) = m$ *várható értékkel, és* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

- *Nagy számok gyenge törvénye: tetszőleges* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

- *Nagy számok erős törvénye:*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m\right) = 1.$$

Mindkét alak azt mondja, hogy ha n nagy, akkor n fae valószínűségi változó átlaga, $\frac{S_n}{n}$ közel van m-hez, egy darab valószínűségi változó várható értékéhez.

Nagy számok törvénye

A nagy számok törvénye szerint sok független, azonos eloszlású valószínűségi változó átlaga közel determinisztikus. Ez sok valós helyzetben nagyon természetes.

Nagy számok törvénye

A nagy számok törvénye szerint sok független, azonos eloszlású valószínűségi változó átlaga közel determinisztikus. Ez sok valós helyzetben nagyon természetes.

Például emiatt tudnak kaszinók (vagy fogadási irodák, biztosítók stb.) tervezni: minden egyes játékos véletlenszerűen nyer vagy veszít, de sok játékos esetén a kaszinó nyeresége hosszú távon garantált.

A nagy számok törvénye szerint sok független, azonos eloszlású valószínűségi változó átlaga közel determinisztikus. Ez sok valós helyzetben nagyon természetes.

Például emiatt tudnak kaszinók (vagy fogadási irodák, biztosítók stb.) tervezni: minden egyes játékos véletlenszerűen nyer vagy veszít, de sok játékos esetén a kaszinó nyeresége hosszú távon garantált.

Rengeteg statisztikai adatnak is emiatt van értelme. Bár egyetlen ember helyzete véletlenszerű, de ha a helyzetet egy nagy társadalmi csoporton átlagoljuk ki, akkor az eredmény közel determinisztikus.

Nagy számok törvénye

A nagy számok törvénye szerint sok független, azonos eloszlású valószínűségi változó átlaga közel determinisztikus. Ez sok valós helyzetben nagyon természetes.

Például emiatt tudnak kaszinók (vagy fogadási irodák, biztosítók stb.) tervezni: minden egyes játékos véletlenszerűen nyer vagy veszít, de sok játékos esetén a kaszinó nyeresége hosszú távon garantált.

Rengeteg statisztikai adatnak is emiatt van értelme. Bár egyetlen ember helyzete véletlenszerű, de ha a helyzetet egy nagy társadalmi csoporton átlagoljuk ki, akkor az eredmény közel determinisztikus.

Emiatt pl. egy járvány lefolyása is közel determinisztikus (annak ellenére, hogy az egyes emberek sorsa véletlenszerű). Hasonlóan igaz ez sok más nagy léptékű folyamatra is.

Nagy számok törvénye

A nagy számok törvénye szerint $\frac{S_n}{n} \to m$ amint $n \to \infty$.

Nagy számok törvénye

A nagy számok törvénye szerint $\frac{S_n}{n} \to m$ amint $n \to \infty$.

A hatoldalú kockás példánál tehát a dobások átlaga tart $7/2 = 3.5$-hez.

Nagy számok törvénye

A nagy számok törvénye szerint $\frac{S_n}{n} \to m$ amint $n \to \infty$.

A hatoldalú kockás példánál tehát a dobások átlaga tart $7/2 = 3.5$-hez.

Amit a nagy számok törvénye *nem* mond, az az, hogy $S_n - nm$ közel lenne 0-hoz; csak annyit mond, hogy $S_n - nm$ kisebb nagyságrendű, mint n.

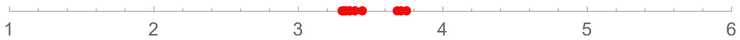
A nagy számok törvénye szerint $\frac{S_n}{n} \to m$ amint $n \to \infty$.

A hatoldalú kockás példánál tehát a dobások átlaga tart $7/2 = 3.5$-hez.

Amit a nagy számok törvénye *nem* mond, az az, hogy $S_n - nm$ közel lenne 0-hoz; csak annyit mond, hogy $S_n - nm$ kisebb nagyságrendű, mint n.

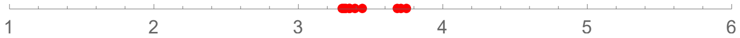
Példa. A hatoldalú kockáknál 100000 dobás átlaga elég közel van 3.5-hez, de az összegük tipikusan 100-as, akár 1000-es nagyságrendben tér el 350000-től. Viszont az eltérés nagyságrendje 100000-nél lényegesen kisebb.

Ábrázolva a fenti mintát 100 dobás átlagára:



Nagy számok törvénye

Ábrázolva a fenti mintát 100 dobás átlagára:



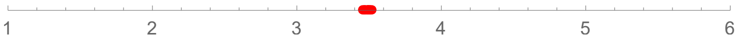
Ábrázolva a fenti mintát 1000 dobás átlagára:

Nagy számok törvénye

Ábrázolva a fenti mintát 100 dobás átlagára:

Ábrázolva a fenti mintát 1000 dobás átlagára:

Ábrázolva a fenti mintát 10000 dobás átlagára:



Kérdések

A NSzT nem kvantitatív; nekünk inkább csak kiindulópont, ahonnan kvantitatívabb eredmények irányába megyünk tovább.

Kérdések

A NSzT nem kvantitatív; nekünk inkább csak kiindulópont, ahonnan kvantitatívabb eredmények irányába megyünk tovább.

A NSzT szerint $S_n - nm$ tipikusan n-nél kisebb nagyságrendű. De akkor mekkora nagyságrendű? (Erről szól majd a Centrális Határeloszlás Tétel.)

Kérdések

A NSzT nem kvantitatív; nekünk inkább csak kiindulópont, ahonnan kvantitatívabb eredmények irányába megyünk tovább.

A NSzT szerint $S_n - nm$ tipikusan n-nél kisebb nagyságrendű. De akkor mekkora nagyságrendű? (Erről szól majd a Centrális Határeloszlás Tétel.)

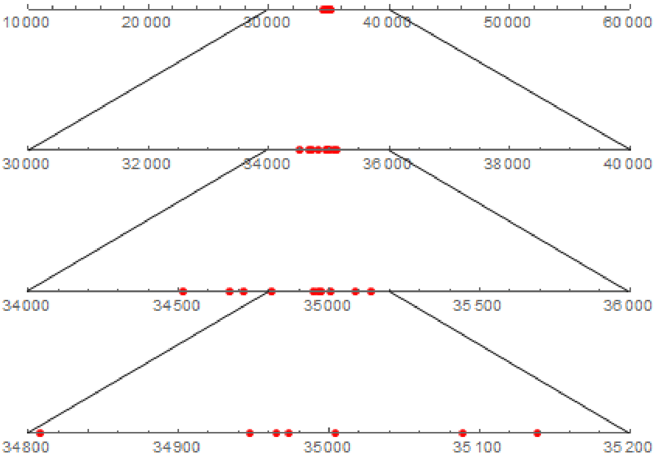
Ugyanakkor a NSzT azt is mondja, hogy $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \text{ távol van } m\text{-től}\right)$ kicsi. Mennyire kicsi? (Erről szól majd a Cramér-tétel.)

Ráközelítés

$S_n - nm$ tipikus nagyságrendjét úgy is lehet interpretálni, hogy mennyire kell „ráközelíteni” nm körül, hogy valamit lássunk. Nézzük meg $n = 10000$ kockadobás összegére!

Ráközelítés

$S_n - nm$ tipikus nagyságrendjét úgy is lehet interpretálni, hogy mennyire kell „ráközelíteni" nm körül, hogy valamit lássunk. Nézzük meg $n = 10000$ kockadobás összegére!



Rákozelítés

Az első rákozelítés nem elég, még túlságosan egy kupacban vannak a pontok.

Még a második rákozelítés sem elég.

A harmadik már jobb, a pontok már jobban szét vannak szóródva.

A negyedik viszont már túl sok, a pontok egy része már kívül esett az intervallumon.

A rákozelítés megfelelő mértéke valahol a harmadik és negyedik ábra között van.

Centrális határeloszlás-tétel

Tétel. (Centrális határeloszlás-tétel (CHT))

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ *fae valószínűségi változók, melyekre* $\mathbb{E}(X_1) = m$ *és* $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$*, és* $S_n = X_1 + \dots + X_n$*. Ekkor*

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

amint $n \to \infty$*, ahol* $\Phi(x)$ *az N(0,1) eloszlásfüggvénye.*

A fenti konvergencia eloszlásban való konvergencia, úgy is jelöljük, hogy

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1).$$

Centrális határeloszlás-tétel

A CHT-ben a kulcs az, hogy $(S_n - nm)$ $\sqrt{n}$-nel van leosztva (σ konstans). Emiatt a CHT lényegében azt mondja, hogy a megfelelő ráközelítés mértéke $\sqrt{n}$.

Centrális határeloszlás-tétel

A CHT-ben a kulcs az, hogy $(S_n - nm)$ $\sqrt{n}$-nel van leosztva (σ konstans). Emiatt a CHT lényegében azt mondja, hogy a megfelelő ráközelítés mértéke $\sqrt{n}$.

Ha $\sqrt{n}$-nél kevésbé közelítünk rá az ábrára, a pontok túlságosan egy kupacban lesznek a várható érték körül.

A CHT-ben a kulcs az, hogy $(S_n - nm)$ $\sqrt{n}$-nel van leosztva (σ konstans). Emiatt a CHT lényegében azt mondja, hogy a megfelelő rákózelítés mértéke $\sqrt{n}$.

Ha $\sqrt{n}$-nél kevésbé közelítünk rá az ábrára, a pontok túlságosan egy kupacban lesznek a várható érték körül.

Ha $\sqrt{n}$-nél jobban rákózelítünk, akkor a pontok teljesen szétszóródnak.

Centrális határeloszlás-tétel

A CHT-ben a kulcs az, hogy $(S_n - nm)$ $\sqrt{n}$-nel van leosztva (σ konstans). Emiatt a CHT lényegében azt mondja, hogy a megfelelő ráközelítés mértéke $\sqrt{n}$.

Ha $\sqrt{n}$-nél kevésbé közelítünk rá az ábrára, a pontok túlságosan egy kupacban lesznek a várható érték körül.

Ha $\sqrt{n}$-nél jobban ráközelítünk, akkor a pontok teljesen szétszóródnak.

Ha $\sigma\sqrt{n}$-nel közelítünk rá, akkor a pontok valami értelmeset rajzolnak ki, konkrétan egy normális eloszlást a várható érték körül.

A CHT-ben a kulcs az, hogy $(S_n - nm)$ $\sqrt{n}$-nel van leosztva (σ konstans). Emiatt a CHT lényegében azt mondja, hogy a megfelelő rákozelítés mértéke $\sqrt{n}$.

Ha $\sqrt{n}$-nél kevésbé közelítünk rá az ábrára, a pontok túlságosan egy kupacban lesznek a várható érték körül.

Ha $\sqrt{n}$-nél jobban rákozelítünk, akkor a pontok teljesen szétszóródnak.

Ha $\sigma\sqrt{n}$-nel közelítünk rá, akkor a pontok valami értelmeset rajzolnak ki, konkrétan egy normális eloszlást a várható érték körül.

Ugyanaz még egy picit másképp megfogalmazva: S_n fluktuációja a várható értéke körül $\sigma\sqrt{n}$ nagyságrendű (és ezen belül egy normális eloszlást követ).

Centrális határeloszlás-tétel

A CHT úgy is értelmezhető, hogy S_n eloszlása közel $\mathrm{N}(mn, \sigma\sqrt{n})$.

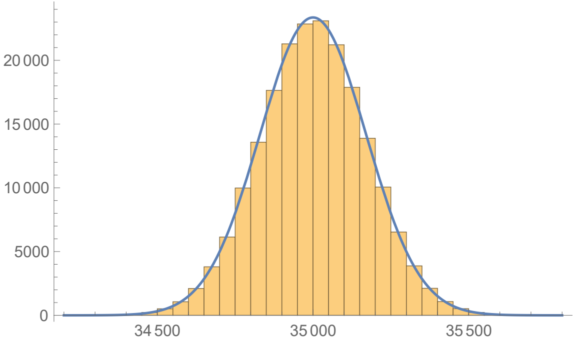
Konkrétan 10000 kockadobás összegére $n = 10000$, $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1.708$ és $m = 7/2 = 3.5$, így S_n eloszlása közel $\mathrm{N}(35000, 170.8)$.

Centrális határeloszlás-tétel

A CHT úgy is értelmezhető, hogy S_n eloszlása közel $\mathrm{N}(mn, \sigma\sqrt{n})$.

Konkrétan 10000 kockadobás összegére $n = 10000$, $\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1.708$ és $m = 7/2 = 3.5$, így S_n eloszlása közel $\mathrm{N}(35000, 170.8)$.

S_n-re sok (200000) realizáció alapján ábrázolt hisztogram és $\mathrm{N}(35000, 170.8)$ sűrűségfüggvénye egy ábrán:



CHT biz. (vázlat) Egy X valószínűségi változó Fourier-transzformáltja (vagy más néven karakterisztikus függvénye)

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

CHT biz. (vázlat) Egy X valószínűségi változó Fourier-transzformáltja (vagy más néven karakterisztikus függvénye)

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Lévy-tétel:

$$\phi_{X_n} \to \phi_X \text{ pontonként a komplex számsíkon } \iff X_n \xrightarrow{d} X.$$

Centrális határeloszlás-tétel

CHT biz. (vázlat) Egy X valószínűségi változó Fourier-transzformáltja (vagy más néven karakterisztikus függvénye)

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

Lévy-tétel:

$$\phi_{X_n} \to \phi_X \text{ pontonként a komplex számsíkon } \iff X_n \xrightarrow{d} X.$$

$\frac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}}$ transzformáltját másodrendig kell sorbafejteni, és ellenőrizni, hogy az N(0,1) transzformáltjához konvergál, amint $n \to \infty$.

És ha nincs függetlenség vagy azonos eloszlás?

A CHT szerint ha az X_n-ek függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor S_n fluktuációja a várható értéke körül $\sigma\sqrt{n}$ nagyságrendű.

És ha nincs függetlenség vagy azonos eloszlás?

A CHT szerint ha az X_n-ek függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor S_n fluktuációja a várható értéke körül $\sigma\sqrt{n}$ nagyságrendű.

De mi a helyzet, ha nem teljesül pl. a függetlenség?

És ha nincs függetlenség vagy azonos eloszlás?

A CHT szerint ha az X_n-ek függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor S_n fluktuációja a várható értéke körül $\sigma\sqrt{n}$ nagyságrendű.

De mi a helyzet, ha nem teljesül pl. a függetlenség?

Attól függően, hogy az X_n-ek hogyan függnek össze, a fluktuáció lehet kisebb vagy nagyobb nagyságrendű is $\sqrt{n}$-nél.

Szélsőséges esetben a fluktuációk n nagyságrendűek is lehetnek, olyankor S_n-re egyáltalán nincs koncentráció!

És ha nincs függetlenség vagy azonos eloszlás?

A CHT szerint ha az X_n-ek függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor S_n fluktuációja a várható értéke körül $\sigma\sqrt{n}$ nagyságrendű.

De mi a helyzet, ha nem teljesül pl. a függetlenség?

Attól függően, hogy az X_n-ek hogyan függnek össze, a fluktuáció lehet kisebb vagy nagyobb nagyságrendű is $\sqrt{n}$-nél.

Szélsőséges esetben a fluktuációk n nagyságrendűek is lehetnek, olyankor S_n-re egyáltalán nincs koncentráció!

Ha az azonos eloszlás sérül, az kisebb gond – mindjárt visszatérünk rá.

És ha nincs függetlenség vagy azonos eloszlás?

Szélsőséges példák következnek.

1. példa. Dobjunk fel egy szabályos érmét; ha fej, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$, ha írás, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$.

Külön-külön az X_i-k azonos eloszlásúak. Viszont S_n értéke $1/2$ valószínűséggel 0, $1/2$ valószínűséggel n, azaz a fluktuációja a várható érték körül n nagyságrendű, S_n nem koncentrálódik.

És ha nincs függetlenség vagy azonos eloszlás?

Szélsőséges példák következnek.

1. példa. Dobjunk fel egy szabályos érmét; ha fej, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$, ha írás, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$.

Külön-külön az X_i-k azonos eloszlásúak. Viszont S_n értéke $1/2$ valószínűséggel 0, $1/2$ valószínűséggel n, azaz a fluktuációja a várható érték körül n nagyságrendű, S_n nem koncentrálódik.

2. példa. Ismét dobjunk fel egy szabályos érmét; ha fej, akkor a páros indexű X_i-k értéke 1, a páratlanoké 0, míg ha írás, akkor fordítva. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy n páros.)

És ha nincs függetlenség vagy azonos eloszlás?

Szélsőséges példák következnek.

1. példa. Dobjunk fel egy szabályos érmét; ha fej, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$, ha írás, $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 1$.

Külön-külön az X_i-k azonos eloszlásúak. Viszont S_n értéke $1/2$ valószínűséggel 0, $1/2$ valószínűséggel n, azaz a fluktuációja a várható érték körül n nagyságrendű, S_n nem koncentrálódik.

2. példa. Ismét dobjunk fel egy szabályos érmét; ha fej, akkor a páros indexű X_i-k értéke 1, a páratlanoké 0, míg ha írás, akkor fordítva. (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy n páros.)

Ekkor külön-külön az X_i-k ismét csak azonos eloszlásúak. Viszont S_n értéke 1 valószínűséggel $n/2$, azaz S_n tökéletesen rákoncentrálódik a várható értékére.

Berry–Esseen-tétel

A következő tétel a CHT-beli becslés hibájára egy felső korlát.

Tétel. (Berry–Esseen)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *fae valószínűségi változók, melyekre* $\mathbb{E}(X_1) = m$ *és* $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$, *és* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. *Ekkor*

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.48\rho}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

ahol $\rho = \mathbb{E}(|X_1 - m|^3)$.

Berry–Esseen-tétel

A következő tétel a CHT-beli becslés hibájára egy felső korlát.

Tétel. (Berry–Esseen)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ *fae valószínűségi változók, melyekre* $\mathbb{E}(X_1) = m$ *és* $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$*, és* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$*. Ekkor*

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{0.48\rho}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

ahol $\rho = \mathbb{E}(|X_1 - m|^3)$.

Nem biz.

A Berry–Esseen-tétel lényegében a CHT kiegészítése, aminek segítségével közelítés helyett garantált alsó és felső korlátokat kaphatunk.

Berry–Esseen-tétel

A Berry–Esseen-tétel lényegében a CHT kiegészítése, aminek segítségével közelítés helyett garantált alsó és felső korlátokat kaphatunk.

A CHT-hez képest szükséges plusz információ $\rho = \mathbb{E}(|X_1 - m|^3)$ értéke. Enélkül a Berry–Esseen-tétel nem használható.

Berry–Esseen-tétel

A Berry–Esseen-tétel lényegében a CHT kiegészítése, aminek segítségével közelítés helyett garantált alsó és felső korlátokat kaphatunk.

A CHT-hez képest szükséges plusz információ $\rho = \mathbb{E}(|X_1 - m|^3)$ értéke. Enélkül a Berry–Esseen-tétel nem használható.

A hibakorlát $\frac{C}{\sqrt{n}}$, típusú, ami lassan csökken n-ben.

Ökölszabályként, ha ρ nem áll rendelkezésre, a CHT-t ne használjuk 10^{-3}-nál kisebb valószínűségek becslésére. (Egyébként előfordulhat, hogy a hiba jóval kisebb, de erre nincs általános garancia.)

Cramér nagyeltérés-tétel

A NSzT szerint $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \text{ távol van } m\text{-től}\right)$ kicsi. Mennyire kicsi?

Cramér nagyeltérés-tétel

A NSzT szerint $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \text{ távol van } m\text{-től}\right)$ kicsi. Mennyire kicsi?

Tétel. (Cramér nagyeltérés-tétel)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ fae valószínűségi változók, és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) \leq e^{-n \min\limits_{x \in [a,b]} I(x)},$$

ahol $I(x) = \max\limits_{\lambda}(\lambda x - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))$. Sőt,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) = -\min_{x \in [a,b]} I(x).$$

A NSzT szerint $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \text{ távol van } m\text{-től}\right)$ kicsi. Mennyire kicsi?

Tétel. (Cramér nagyeltérés-tétel)

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ fae valószínűségi változók, és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b]\right) \le e^{-n \min\limits_{x\in[a,b]} I(x)},$$

ahol $I(x) = \max\limits_{\lambda}(\lambda x - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))$. Sőt,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b]\right) = -\min_{x\in[a,b]} I(x).$$

Biz. mindjárt, de előbb megjegyzések.

A Cramér-tétel szerint annak a valószínűsége, hogy $S_n - nm$ n-nel összemérhető nagyságrendű (vagy ezzel ekvivalensen $\frac{S_n}{n} - m$ konstans nagyságrendű), n-ben exponenciálisan csökken.

A Cramér-tétel szerint annak a valószínűsége, hogy $S_n - nm$ n-nel összemérhető nagyságrendű (vagy ezzel ekvivalensen $\frac{S_n}{n} - m$ konstans nagyságrendű), n-ben exponenciálisan csökken.

$I(x) = \max_{\lambda}(\lambda x - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))$ az ún. *Cramér-féle rátafüggvény*.

Cramér nagyeltérés-tétel

A Cramér-tétel szerint annak a valószínűsége, hogy $S_n - nm$ n-nel összemérhető nagyságrendű (vagy ezzel ekvivalensen $\frac{S_n}{n} - m$ konstans nagyságrendű), n-ben exponenciálisan csökken.

$I(x) = \max_{\lambda}(\lambda x - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))$ az ún. *Cramér-féle rátafüggvény*.

Nevezetes eloszlásokra az $I(x)$ függvény ismert. Ebben a kurzusban nem elvárás $I(x)$ kiszámítása; azon problémákhoz, ahol releváns, meg lesz adva.

A Cramér-tétel szerint annak a valószínűsége, hogy $S_n - nm$ n-nel összemérhető nagyságrendű (vagy ezzel ekvivalensen $\frac{S_n}{n} - m$ konstans nagyságrendű), n-ben exponenciálisan csökken.

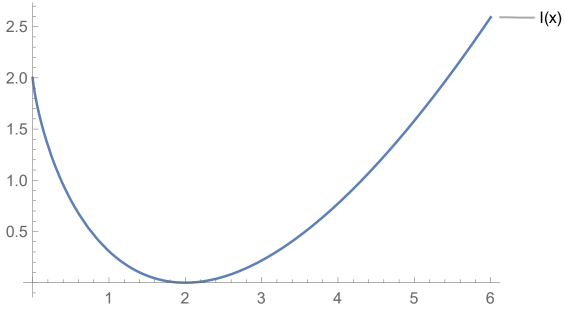
$I(x) = \max_\lambda(\lambda x - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))$ az ún. *Cramér-féle rátafüggvény*.

Nevezetes eloszlásokra az $I(x)$ függvény ismert. Ebben a kurzusban nem elvárás $I(x)$ kiszámítása; azon problémákhoz, ahol releváns, meg lesz adva.

Az $I(x)$ X_1 teljes eloszlásától függ. Ha nem ismert X_1 teljes eloszlása, akkor Cramér nem alkalmazható. (Szemben pl. a CHT-vel, ahol elég $\mathbb{E}(X_1) = m$ és $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$ ismerete, nem kell a teljes eloszlás.)

A Cramér-féle rátafüggvény tulajdonságai:

- értelmezési tartománya a legkisebb intervallum, ami X_1 lehetséges értékeit tartalmazza;
- $I(x) \geq 0$;
- $I(m) = 0$; csökkenő $x \leq m$-re és növő $x \geq m$-re;
- $I(x)$ konvex.



Példa: a POI(2) eloszláshoz tartozó $I(x) = x\log(x/2) - x + 2$.

További megjegyzések Cramérhoz

A Cramér-tétel szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) \leq e^{-n \min\limits_{x\in[a,b]} I(x)}.$$

- Ha $a < b < m$, azaz a teljes $[a, b]$ intervallum m-től balra van, $\min\limits_{x\in[a,b]} I(x) = I(b)$.
- Ha $a < m < b$, azaz $m \in [a, b]$, akkor $\min\limits_{x\in[a,b]} I(x) = I(m) = 0$, és a tétel állítása semmitmondó.
- Ha $m < a < b$, azaz a teljes $[a, b]$ intervallum m-től jobbra van, $\min\limits_{x\in[a,b]} I(x) = I(a)$.

Tehát igazából minden esetben elég $I(x)$ értékét egyetlen pontban kiszámítani (a-ban vagy b-ben, amelyik közelebb van m-hez).

További megjegyzések Cramérhoz

A Cramér-tétel képlete numerikusan nagyon instabil: $I(x)$ kiszámításánál egy kicsi numerikus hibát először az n-nel való szorzás, majd az e-adra emelés is sokszorosára nagyít.

További megjegyzések Cramérhoz

A Cramér-tétel képlete numerikusan nagyon instabil: $I(x)$ kiszámításánál egy kicsi numerikus hibát először az n-nel való szorzás, majd az e-adra emelés is sokszorosára nagyít.

Emiatt $I(x)$-et mindig legalább 6-7 értékes jeggyel kell kiszámítani.

További megjegyzések Cramérhoz

A Cramér-tétel képlete numerikusan nagyon instabil: $I(x)$ kiszámításánál egy kicsi numerikus hibát először az n-nel való szorzás, majd az e-adra emelés is sokszorosára nagyít.

Emiatt $I(x)$-et mindig legalább 6-7 értékes jeggyel kell kiszámítani.

A Cramér második állítása csak annyit mond, hogy az első részben a kitevő pontos, vagyis az egyenlőtlenségben a korlát egy szubexponenciális faktortól eltekintve éles. Közvetlenül ezt nem fogjuk használni, annyiban érdekes, hogy az egyenlőtlenség viszonylag pontos.

További megjegyzések Cramérhoz

A Cramér-tétel képlete numerikusan nagyon instabil: $I(x)$ kiszámításánál egy kicsi numerikus hibát először az n-nel való szorzás, majd az e-adra emelés is sokszorosára nagyít.

Emiatt $I(x)$-et mindig legalább 6-7 értékes jeggyel kell kiszámítani.

A Cramér második állítása csak annyit mond, hogy az első részben a kitevő pontos, vagyis az egyenlőtlenségben a korlát egy szubexponenciális faktortól eltekintve éles. Közvetlenül ezt nem fogjuk használni, annyiban érdekes, hogy az egyenlőtlenség viszonylag pontos.

A Cramér-tétel nagyeltérés-tétel, azaz használható extrém kicsi valószínűségek becslésére. (A CHT nem!)

Biz. (vázlat). Használni fogjuk a Markov-egyenlőtlenséget: ha $Y \geq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(Y \geq c\mathbb{E}(Y)) \leq \frac{1}{c}.$$

Cramér bizonyítás

Biz. (vázlat). Használni fogjuk a Markov-egyenlőtlenséget: ha $Y \geq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(Y \geq c\mathbb{E}(Y)) \leq \frac{1}{c}.$$

Cramér: feltesszük, hogy $m < a < b$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) \leq \mathbb{P}(S_n \geq na) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda na}\right)$$

tetszőleges $\lambda > 0$-ra.

Cramér bizonyítás

Biz. (vázlat). Használni fogjuk a Markov-egyenlőtlenséget: ha $Y \geq 0$, akkor

$$\mathbb{P}(Y \geq c\mathbb{E}(Y)) \leq \frac{1}{c}.$$

Cramér: feltesszük, hogy $m < a < b$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) \leq \mathbb{P}(S_n \geq na) = \mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda na}\right)$$

tetszőleges $\lambda > 0$-ra.

Markov-egyenlőtlenséget alkalmazunk $Y = e^{\lambda S_n}$ választással.

$$\mathbb{P}\left(e^{\lambda S_n} \geq e^{\lambda na}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda na}}.$$

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol az X_i-k függetlenek, így

$$\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = \mathbb{E}(e^{\lambda(X_1+\cdots+X_n)}) = \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\ldots\mathbb{E}(e^{\lambda X_n}) = \left(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\right)^n,$$

ahonnan

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) \leq \frac{\left(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\right)^n}{e^{\lambda n a}} = e^{-n(\lambda a - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))}.$$

λ értékét választhatjuk úgy, hogy $\lambda a - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})$ maximális legyen, ez pedig pont az $I(x)$ függvény definíciója az $x = a$ pontban.

Cramér bizonyítás

$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol az X_i-k függetlenek, így

$$\mathbb{E}(e^{\lambda S_n}) = \mathbb{E}(e^{\lambda(X_1+\cdots+X_n)}) = \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\ldots\mathbb{E}(e^{\lambda X_n}) = \left(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\right)^n,$$

ahonnan

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b]\right) \leq \frac{\left(\mathbb{E}(e^{\lambda X_1})\right)^n}{e^{\lambda n a}} = e^{-n(\lambda a - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1}))}.$$

λ értékét választhatjuk úgy, hogy $\lambda a - \log \mathbb{E}(e^{\lambda X_1})$ maximális legyen, ez pedig pont az $I(x)$ függvény definíciója az $x = a$ pontban.

A (b) részt nem biz.

Hoeffding-korlát

Tétel. (Hoeffding)

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ *független valószínűségi változók, melyekre*

$$a_i \leq X_i \leq b_i,$$

és $S = X_1 + \cdots + X_n$. *Ekkor tetszőleges* $t > 0$*-ra*

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}}$$

Nem biz.

Megjegyzések.

- Csak függetlenséget tettünk fel, az X_i-k lehetnek különböző eloszlásúak.

Hoeffding-korlát

Megjegyzések.

- Csak függetlenséget tettünk fel, az X_i-k lehetnek különböző eloszlásúak.
- A Hoeffding-korlát csak felső becslés $\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t)$-re; lehet, hogy nem éles.

Hoeffding-korlát

Megjegyzések.

- Csak függetlenséget tettünk fel, az X_i-k lehetnek különböző eloszlásúak.
- A Hoeffding-korlát csak felső becslés $\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t)$-re; lehet, hogy nem éles.
- A Hoeffding-korlát is nagyeltérés-tétel, tehát használható extrém kis valószínűségek becslésére.

Megjegyzések.

- Csak függetlenséget tettünk fel, az X_i-k lehetnek különböző eloszlásúak.
- A Hoeffding-korlát csak felső becslés $\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t)$-re; lehet, hogy nem éles.
- A Hoeffding-korlát is nagyeltérés-tétel, tehát használható extrém kis valószínűségek becslésére.
- A Hoeffding-korlát szimmetrikus; a tétel feltételei mellett a következő is teljesül:

$$\mathbb{P}(S < \mathbb{E}(S) - t) \leq e^{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}}.$$

Hoeffding-korlát

A Hoeffding-korlát elvileg használható abban a tartományban, mint a CHT, ha $t = C\sqrt{n}$-et választunk. Viszont a CHT által adott becslés pontosabb.

Hoeffding-korlát

A Hoeffding-korlát elvileg használható abban a tartományban, mint a CHT, ha $t = C\sqrt{n}$-et választunk. Viszont a CHT által adott becslés pontosabb.

A Hoeffding-korlát használható abban a tartományban is, mint a Cramér-tétel, ha $t = Cn$-et választunk. Cramér általában jobb becslést ad, de sok esetben a Hoeffding-korlát is aránylag jó.

Hoeffding-korlát

A Hoeffding-korlát elvileg használható abban a tartományban, mint a CHT, ha $t = C\sqrt{n}$-et választunk. Viszont a CHT által adott becslés pontosabb.

A Hoeffding-korlát használható abban a tartományban is, mint a Cramér-tétel, ha $t = Cn$-et választunk. Cramér általában jobb becslést ad, de sok esetben a Hoeffding-korlát is aránylag jó.

A Hoeffding-korlátnál az azonos eloszlás nem feltétel, tehát olyan esetekben is alkalmazható lehet, ahol a CHT és a Cramér nem.

A Hoeffding-korlát elvileg használható abban a tartományban, mint a CHT, ha $t = C\sqrt{n}$-et választunk. Viszont a CHT által adott becslés pontosabb.

A Hoeffding-korlát használható abban a tartományban is, mint a Cramér-tétel, ha $t = Cn$-et választunk. Cramér általában jobb becslést ad, de sok esetben a Hoeffding-korlát is aránylag jó.

A Hoeffding-korlátnál az azonos eloszlás nem feltétel, tehát olyan esetekben is alkalmazható lehet, ahol a CHT és a Cramér nem.

A Hoeffding-korlát alkalmazásához más input paraméterek kellenek:

- alsó és felső korlát az egyes X_i-kre: $a_i \leq X_i \leq b_i$, és
- $\mathbb{E}(S)$

az $\mathbb{E}(X_1) = m, \mathbb{D}(X_1) = \sigma$ (CHT) vagy $I(x)$ (Cramér) helyett.

Összefoglalás

	input	megj.	nagy eltérés?
CHT	$m = \mathbb{E}(X_1)$ $\sigma = \mathbb{D}(X_1)$	csak ha $\mathbb{P}(.) \geq 10^{-3}$	nem
CHT + Berry–Esseen	$m = \mathbb{E}(X_1)$ $\sigma = \mathbb{D}(X_1)$ $\rho = \mathbb{E}(\lvert X_1 - m\rvert^3)$	garantált alsó és felső korlát	nem
Cramér	$I(x)$	numerikusan instabil	igen
Hoeffding	$a, b : a \leq X_1 \leq b$	nem ae tagokra is	igen

1. feladat

Egy szabályos hatoldalú dobókockát feldobunk 100-szor. Jelölje S a dobások összegét. Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy S legalább 370.

1. feladat

Egy szabályos hatoldalú dobókockát feldobunk 100-szor. Jelölje S a dobások összegét. Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy S legalább 370.

Megoldás. $n = 100$, $\mathbb{E}(X_1) = m = 3.5$, $\mathbb{D}(X_1) = \sigma = 1.708$, és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $X_1, \ldots, X_n$ az egyes dobások értéke.

Egy szabályos hatoldalú dobókockát feldobunk 100-szor. Jelölje S a dobások összegét. Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy S legalább 370.

Megoldás. $n = 100$, $\mathbb{E}(X_1) = m = 3.5$, $\mathbb{D}(X_1) = \sigma = 1.708$, és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $X_1, \ldots, X_n$ az egyes dobások értéke.

$$\mathbb{P}(S_n \geq 370) = 1 - \mathbb{P}(S_n < 370) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{370 - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{370 - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{370 - 100 \times 3.5}{1.708 \times \sqrt{100}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(1.17) \approx 1 - 0.8790 = 0.121.$$

(Φ értékét táblázatból néztük ki.)

1. feladat

Egy szabályos hatoldalú dobókockát feldobunk 100-szor. Jelölje S a dobások összegét. Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy S legalább 370.

Megoldás. $n = 100$, $\mathbb{E}(X_1) = m = 3.5$, $\mathbb{D}(X_1) = \sigma = 1.708$, és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $X_1, \ldots, X_n$ az egyes dobások értéke.

$$\mathbb{P}(S_n \geq 370) = 1 - \mathbb{P}(S_n < 370) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S_n - mn}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{370 - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{370 - mn}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{370 - 100 \times 3.5}{1.708 \times \sqrt{100}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(1.17) \approx 1 - 0.8790 = 0.121.$$

(Φ értékét táblázatból néztük ki.) Tehát

$$\mathbb{P}(S_n \geq 370) \approx 0.121 = 12.1\%.$$

2. feladat

Egy szabályos érmét feldobunk 10000-szer. Jelölje S a fejek számát. Olyan y értékre szeretnénk becslést adni, amelyet S 95% eséllyel nem lép át.

(a) CHT alapján adjunk becslést y-ra.

(b) Berry–Esseen-tétel alapján korlátozzuk a CHT hibáját, majd ez alapján adjunk y-ra alsó és felső becslést.

(c) Hoeffding-korlát alapján adjunk felső becslést y-ra.

Megoldás.

(a) Legyen

$$S = X_1 + \cdots + X_n,$$

ahol $n = 10000$, és X_i értéke 0 vagy 1 attól függően, hogy az i-edik dobás írás vagy fej. Ekkor CHT alapján

$$\mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi(x).$$

2. feladat

Megoldás.

(a) Legyen

$$S = X_1 + \cdots + X_n,$$

ahol $n = 10000$, és X_i értéke 0 vagy 1 attól függően, hogy az i-edik dobás írás vagy fej. Ekkor CHT alapján

$$\mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \approx \Phi(x).$$

$$m = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

2. feladat

(a) Azt szeretnénk, hogy $P(S < y) = 0.95$ teljesüljön, de ezt az egyenletet nehéz y-ra megoldani. Ehelyett a CHT alapján közelítünk:

$$\mathbb{P}(S < y) = \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

és azt az egyenletet oldjuk meg, hogy

$$\Phi\left(\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.95.$$

2. feladat

(a) Azt szeretnénk, hogy $P(S < y) = 0.95$ teljesüljön, de ezt az egyenletet nehéz y-ra megoldani. Ehelyett a CHT alapján közelítünk:

$$\mathbb{P}(S < y) = \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

és azt az egyenletet oldjuk meg, hogy

$$\Phi\left(\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.95.$$

A standard normális eloszlás táblázatából

$$\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}} = 1.65,$$

és így

$$y \approx nm + 1.65\sigma\sqrt{n} = 10000 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot \sqrt{10000} \cdot 1.65 = 5083.$$

(b) Berry–Esseen alapján

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{0.48\rho}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

ahol

$$\rho = \mathbb{E}(|X_1 - m|^3) = \frac{1}{2}\cdot\left|0 - \frac{1}{2}\right|^3 + \frac{1}{2}\cdot\left|1 - \frac{1}{2}\right|^3 = \frac{1}{8},$$

(b) Berry–Esseen alapján

$$\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right| \le \frac{0.48\rho}{\sigma^3\sqrt{n}},$$

ahol

$$\rho = \mathbb{E}(|X_1 - m|^3) = \frac{1}{2}\cdot\left|0 - \frac{1}{2}\right|^3 + \frac{1}{2}\cdot\left|1 - \frac{1}{2}\right|^3 = \frac{1}{8},$$

tehát a CHT hibájára a felső becslés:

$$\frac{0.48\rho}{\sigma^3\sqrt{n}} = \frac{0.48\cdot\frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3\sqrt{10000}} = 0.0048.$$

(b) Berry–Esseen alapján

$$\left|\mathbb{P}(S < y) - \Phi\left(\frac{y - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \leq 0.0048,$$

tehát ha y_1-et úgy választjuk meg, hogy

$$\Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.95 - 0.0048 = 0.9452,$$

akkor

$$\mathbb{P}(S < y_1) \leq 0.95$$

és y_1 egy garantált alsó becslés a valódi y-ra.

2. feladat

(b)

$$\Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.9452,$$

$$\frac{y_1 - nm}{\sigma\sqrt{n}} = 1.60$$

táblázat alapján,

(b)

$$\Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.9452,$$

$$\frac{y_1 - nm}{\sigma\sqrt{n}} = 1.60$$

táblázat alapján, és

$$y_1 = nm + 1.60\sigma\sqrt{n} = 10000 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot \sqrt{10000} \cdot 1.60 = 5080.$$

(b) Hasonlóan y_2 legyen olyan, hogy

$$\Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.95 + 0.0048 = 0.9548,$$

és akkor

$$y_2 = nm + 1.69\sigma\sqrt{n} = 10000 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot \sqrt{10000} \cdot 1.69 = 5085.$$

(b) Hasonlóan y_2 legyen olyan, hogy

$$\Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 0.95 + 0.0048 = 0.9548,$$

és akkor

$$y_2 = nm + 1.69\sigma\sqrt{n} = 10000 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot \sqrt{10000} \cdot 1.69 = 5085.$$

Tehát az (a) rész becslése alapján

$$y \approx 5083,$$

míg (b) garantálja, hogy

$$5080 \leq y \leq 5085.$$

2. feladat

(c) Mindegyik X_i 0 vagy 1 lehet, így

$$a_i = 0 \leq X_i \leq 1 = b_i,$$

és Hoeffding szerint

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}}.$$

$a_i = 1$ és $b_i = 0$ minden i-re, így ez egyszerűsíthető:

$$\mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}}.$$

(c) Ha y olyan, hogy

$$\mathbb{P}(S < y) = 0.95,$$

akkor

$$\mathbb{P}(S \geq y) = 0.05.$$

(c) Ha y olyan, hogy

$$\mathbb{P}(S < y) = 0.95,$$

akkor

$$\mathbb{P}(S \geq y) = 0.05.$$

Hoeffding-et úgy használunk, hogy $y_3 = \mathbb{E}(S) + t$-t választunk, és akkor

$$\mathbb{P}(S \geq y_3) = \mathbb{P}(S \geq \mathbb{E}(S) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}}.$$

2. feladat

(c) Ha y olyan, hogy

$$\mathbb{P}(S < y) = 0.95,$$

akkor

$$\mathbb{P}(S \geq y) = 0.05.$$

Hoeffding-et úgy használunk, hogy $y_3 = \mathbb{E}(S) + t$-t választunk, és akkor

$$\mathbb{P}(S \geq y_3) = \mathbb{P}(S \geq \mathbb{E}(S) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}}.$$

Ahelyett, hogy a baloldalt tennénk egyenlővé 0.05-dal, a jobboldalt állítjuk be 0.05-ra. Ekkor y_3 felső becslés lesz a valódi y-ra.

(c)

$$e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}} = e^{-\frac{2t^2}{10000\cdot(1-0)^2}} = 0.05,$$

ahonnan

$$t \approx 123,$$

(c)

$$e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}} = e^{-\frac{2t^2}{10000\cdot(1-0)^2}} = 0.05,$$

ahonnan

$$t \approx 123,$$

és

$$y_3 = \mathbb{E}(S) + t = 5000 + 123 = 5123.$$

(c)

$$e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}} = e^{-\frac{2t^2}{10000\cdot(1-0)^2}} = 0.05,$$

ahonnan

$$t \approx 123,$$

és

$$y_3 = \mathbb{E}(S) + t = 5000 + 123 = 5123.$$

Hasonlítsuk össze a Berry–Esseen alapján kapott $5078 \leq y \leq 5087$ korlátokkal.

3. feladat

Egy szabályos érmét feldobunk 40000-szer. Annak a valószínűségét szeretnénk megbecsülni, hogy legalább 22000 fejet kapunk.

(a) Próbáljuk meg alkalmazni a CHT-t. Mit tapasztalunk?

(b) Adjunk felső becslést a valószínűségre a Hoeffding-korlát alapján.

(c) Adjunk felső becslést a valószínűségre a Cramér-tétel alapján. (A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln\left(\frac{x(1-p)}{(1-x)p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$.)

Megoldás.

(a) Legyen

$$S = X_1 + \cdots + X_n,$$

ahol $n = 40000$ és X_i értéke 1, ha az i-edik dobás fej, 0, ha írás. Ekkor

$$m = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}, \qquad \sigma = \mathbb{D}(X_1) = \frac{1}{2}.$$

Megoldás.

(a) Legyen

$$S = X_1 + \cdots + X_n,$$

ahol $n = 40000$ és X_i értéke 1, ha az i-edik dobás fej, 0, ha írás. Ekkor

$$m = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}, \qquad \sigma = \mathbb{D}(X_1) = \frac{1}{2}.$$

CHT szerint

$$\mathbb{P}(S < 22000) = \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{22000 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{22000 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

(a) n, m, σ értékeit beírva

$$\Phi\left(\frac{22000 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{22000 - 40000 \cdot 0.5}{0.5\sqrt{40000}}\right) = \Phi(20).$$

(a) n, m, σ értékeit beírva

$$\Phi\left(\frac{22000 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{22000 - 40000 \cdot 0.5}{0.5\sqrt{40000}}\right) = \Phi(20).$$

Ezzel a gond egyrészt az, hogy $\Phi(20)$ nincs a táblázatban (bár ez bizonyos szempontból csak technikai gond), másrészt már $\Phi(3.09) = 0.999$, tehát $\Phi(20)$ jóval közelebb van 1-hez, mint 10^{-3}, és a CHT-t egyébként sem jó ötlet használni ilyen esetben.

3. feladat

(b) Hoeffding alkalmazásához először is

$$a = 0 \leq X_i \leq 1 = b,$$

és továbbra is $\mathbb{E}(S) = 20000$.

3. feladat

(b) Hoeffding alkalmazásához először is

$$a = 0 \leq X_i \leq 1 = b,$$

és továbbra is $\mathbb{E}(S) = 20000$. Ekkor

$$\mathbb{P}(S \geq 22000) = \mathbb{P}(S \geq \underbrace{20000}_{\mathbb{E}(S)} + \underbrace{2000}_{t}) \leq$$

$$e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}} = e^{-\frac{2\cdot 2000^2}{40000(1-0)^2}} = e^{-200} \approx 1.38 \cdot 10^{-87}.$$

(c) Cramér alkalmazásához legyen

$$\mathbb{P}(S \geq 22000) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{22000}{40000}, \frac{40000}{40000}\right]\right).$$

3. feladat

(c) Cramér alkalmazásához legyen

$$\mathbb{P}(S \geq 22000) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{22000}{40000}, \frac{40000}{40000}\right]\right).$$

Ekkor Cramér szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [a, b]\right) \leq e^{-n \min_{x \in [a,b]} I(x)}.$$

(c) Cramér alkalmazásához legyen

$$\mathbb{P}(S \geq 22000) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{22000}{40000}, \frac{40000}{40000}\right]\right).$$

Ekkor Cramér szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [a, b]\right) \leq e^{-n \min_{x \in [a,b]} I(x)}.$$

Mivel $[a, b] = \left[\frac{22000}{40000}, \frac{40000}{40000}\right]$ teljesen jobbra van $m = 0.5$-től, és

$$\min_{x \in [a,b]} I(x) = I(a).$$

(c) Tehát

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{22000}{40000}, \frac{40000}{40000}\right]\right) \leq e^{-nI\left(\frac{22000}{40000}\right)},$$

ahol $I(x) = x \ln\left(\frac{x(1-p)}{(1-x)p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$.

(c) Tehát

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{22000}{40000}, \frac{40000}{40000}\right]\right) \le e^{-nI\left(\frac{22000}{40000}\right)},$$

ahol $I(x) = x \ln\left(\frac{x(1-p)}{(1-x)p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$.

Behelyettesítve $p = \frac{1}{2} = 0.5$-et és $x = \frac{22000}{40000} = 0.55$-ot $I(x)$-be,

$$I(x) \approx 0.0050084$$

adódik, és

$$\mathbb{P}(S \ge 22000) \le e^{-40000 \cdot I\left(\frac{22000}{40000}\right)} \approx 9.9 \cdot 10^{-88}.$$

3. feladat

Összefoglalva az egyes becslések $\mathbb{P}(S \geq 22000)$-re:

Hoeffding	$1.38 \cdot 10^{-87}$
Cramér	$9.9 \cdot 10^{-88}$
a valóság	$2.18 \cdot 10^{-89}$

6. feladat

Az épülő kelet-szibériai kőolajvezeték (ESPO pipeline) mintegy 700 olajkút termelését gyűjti majd össze és szállítja Kína felé. Az olajkutak napi termelése véletlenszerű és független; semelyiké nem kevesebb, mint 490 hordó és nem haladja meg az 1380 hordót, és az átlagos termelésük egy nap összesen 560000 hordó.

(a) Mekkora legyen az olajvezeték kapacitása, ha az üzemeltető azt szeretné, hogy a napi termelés legfeljebb 10^{-10} eséllyel legyen nagyobb a kapacitásnál?

(b) Adjunk becslést 10^{-10} helyett 10^{-6} és 10^{-8} valószínűségre is.

(c) Mekkora kapacitásnál lesz a túlcsordulás valószínűsége 0? Mekkora kapacitásnál lesz a túlcsordulás valószínűsége $1/2$? Hasonlítsuk össze a korábbi valószínűségekkel!

(d) A kutakról részletesebb információt is kapunk, amiből kiderül, hogy 400 kút termelése mindenképpen 490 hordó és 1040 hordó közé esik, a többi 300 kút termelése pedig mindenképpen 880 hordó és 1380 hordó közé esik. Ez alapján adjunk jobb becslést a szükséges kapacitásra.

Megoldás.

(a) A teljes napi termelés $S = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 700$ és az X_i-k az egyes kutak termelése.

6. feladat

Megoldás.

(a) A teljes napi termelés $S = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 700$ és az X_i-k az egyes kutak termelése.

Becslést kell adnunk olyan C kapacitásra, hogy a túlcsordulás valószínűsége

$$\mathbb{P}(S > C) \leq 10^{-10}.$$

6. feladat

Megoldás.

(a) A teljes napi termelés $S = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 700$ és az X_i-k az egyes kutak termelése.

Becslést kell adnunk olyan C kapacitásra, hogy a túlcsordulás valószínűsége

$$\mathbb{P}(S > C) \leq 10^{-10}.$$

A megadott információk alapján $\mathbb{E}(S) = 560000$ és

$$a = 490 \leq X_i \leq 1380 = b.$$

Hoeffding alkalmazásához legyen $C = \mathbb{E}(S) + t$, és

$$\mathbb{P}(S > C) = \mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}}.$$

Megoldás.

(a) A teljes napi termelés $S = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 700$ és az X_i-k az egyes kutak termelése.

Becslést kell adnunk olyan C kapacitásra, hogy a túlcsordulás valószínűsége

$$\mathbb{P}(S > C) \leq 10^{-10}.$$

A megadott információk alapján $\mathbb{E}(S) = 560000$ és

$$a = 490 \leq X_i \leq 1380 = b.$$

Hoeffding alkalmazásához legyen $C = \mathbb{E}(S) + t$, és

$$\mathbb{P}(S > C) = \mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S) + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}}.$$

A jobboldalt beállítjuk 10^{-10}-re és ebből kiszámítjuk t, majd C értékét.

(a)

$$e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}} = e^{-\frac{2t^2}{700\cdot(1380-490)^2}} = 10^{-10},$$

ahonnan $t \approx 79900$, és

$$C = \mathbb{E}(S) + t = 560000 + 79900 = 639900.$$

6. feladat

(a)

$$e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}} = e^{-\frac{2t^2}{700\cdot(1380-490)^2}} = 10^{-10},$$

ahonnan $t \approx 79900$, és

$$C = \mathbb{E}(S) + t = 560000 + 79900 = 639900.$$

(b) 10^{-8} vagy 10^{-6} túlcsordulási valószínűséghez tartozó C értékeket ugyanígy lehet kiszámítani.

6. feladat

(a)

$$e^{-\frac{2t^2}{n(b-a)^2}} = e^{-\frac{2t^2}{700\cdot(1380-490)^2}} = 10^{-10},$$

ahonnan $t \approx 79900$, és

$$C = \mathbb{E}(S) + t = 560000 + 79900 = 639900.$$

(b) 10^{-8} vagy 10^{-6} túlcsordulási valószínűséghez tartozó C értékeket ugyanígy lehet kiszámítani.

(c) 0 túlcsordulási valószínűséghez $C = 700 \cdot 1380 = 966000$ szükséges. Összességében

$\mathbb{P}(S > C)$	0.5	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}	0
C	560000	621900	631500	639900	966000

(d) A részletesebb információt is figyelembe véve.

$$490 \leq X_i \leq 1040 \qquad 400 \text{ kútra;}$$
$$880 \leq X_i \leq 1380 \qquad 300 \text{ kútra.}$$

(d) A részletesebb információt is figyelembe véve.

$$\begin{aligned} 490 \le X_i \le 1040 \qquad & 400 \text{ kútra;} \\ 880 \le X_i \le 1380 \qquad & 300 \text{ kútra.} \end{aligned}$$

Hoeffding alapján így

$$\mathbb{P}(S > C) = \mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S)+t) \le e^{-\frac{2t^2}{400(1040-490)^2+300(1380-880)^2}} = 10^{-10},$$

ahonnan $t \approx 47500$, és

$$C = \mathbb{E}(S) + t = 560000 + 47500 = 607500.$$

(d) A részletesebb információt is figyelembe véve.

$$490 \leq X_i \leq 1040 \qquad \text{400 kútra;}$$
$$880 \leq X_i \leq 1380 \qquad \text{300 kútra.}$$

Hoeffding alapján így

$$\mathbb{P}(S > C) = \mathbb{P}(S > \mathbb{E}(S)+t) \leq e^{-\frac{2t^2}{400(1040-490)^2+300(1380-880)^2}} = 10^{-10},$$

ahonnan $t \approx 47500$, és

$$C = \mathbb{E}(S) + t = 560000 + 47500 = 607500.$$

Tehát részletesebb információ alapján pontosabban tudunk méretezni.

10. feladat

(a) Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 1 nap alatt legalább 1500 csomag érkezik.

(b) Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 1 nap alatt legalább 1800 csomag érkezik.

(Segítség: az EXP(μ) eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$, míg a POI($\lambda$) eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$ ($x > 0$-ra).)

10. feladat

Megoldás. Jelölje X_i az i-edik 1 perces intervallumban érkező csomagok számát; $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$. Az egy nap alatt érkező összes csomagok száma

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

ahol $n = 1440$ (ennyi perc van egy napban).

Megoldás. Jelölje X_i az i-edik 1 perces intervallumban érkező csomagok számát; $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$. Az egy nap alatt érkező összes csomagok száma

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

ahol $n = 1440$ (ennyi perc van egy napban).

A $\mathbb{P}(S \geq 1500)$ valószínűséget kell megbecsülnünk.

Megoldás. Jelölje X_i az i-edik 1 perces intervallumban érkező csomagok számát; $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$. Az egy nap alatt érkező összes csomagok száma

$$S_n = X_1 + \dots + X_n,$$

ahol $n = 1440$ (ennyi perc van egy napban).

A $\mathbb{P}(S \geq 1500)$ valószínűséget kell megbecsülnünk.

$\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}(X_1) = 1440 \cdot 1$ nincs túl messze 1500-tól, ezért ez nem tűnik nagyeltérés-problémának; próbáljuk meg a CHT-t.

10. feladat

A CHT-hez szükséges input:

$$m = \mathbb{E}(X_1) = 1, \qquad \sigma = \mathbb{D}(X_1) = 1.$$

10. feladat

A CHT-hez szükséges input:

$$m = \mathbb{E}(X_1) = 1, \qquad \sigma = \mathbb{D}(X_1) = 1.$$

A CHT szerint

$$\mathbb{P}(S \geq 1500) = 1 - \mathbb{P}(S < 1500) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{1500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{1500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1500 - 1440 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{1440}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\,(1.58) = 1 - 0.9429 = 0.0571.$$

10. feladat

Mi történik, ha az idő felosztását 1 perc helyett valami másra választjuk?

Mi történik, ha az idő felosztását 1 perc helyett valami másra választjuk? Szélsőséges esetben lehet az egész nap is egyetlen intervallum, tehát legyen az egy nap alatt érkező csomagok száma X_1 (azaz $n = 1$), ekkor $X_1 \sim \mathrm{POI}(1440)$, és

$$m = \mathbb{E}(X_1) = 1440, \qquad \sigma = \mathbb{D}(X_1) = \sqrt{1440}.$$

10. feladat

Mi történik, ha az idő felosztását 1 perc helyett valami másra választjuk? Szélsőséges esetben lehet az egész nap is egyetlen intervallum, tehát legyen az egy nap alatt érkező csomagok száma X_1 (azaz $n = 1$), ekkor $X_1 \sim \mathrm{POI}(1440)$, és

$$m = \mathbb{E}(X_1) = 1440, \qquad \sigma = \mathbb{D}(X_1) = \sqrt{1440}.$$

Alkalmazzuk a CHT-t $S = X_1$-re:

$$\mathbb{P}(S \geq 1500) = 1 - \mathbb{P}(S < 1500) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{1500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{1500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1500 - 1 \cdot 1440}{\sqrt{1440} \cdot \sqrt{1}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(1.58\right) = 1 - 0.9429 = 0.0571.$$

10. feladat

Mi történik, ha az idő felosztását 1 perc helyett valami másra választjuk? Szélsőséges esetben lehet az egész nap is egyetlen intervallum, tehát legyen az egy nap alatt érkező csomagok száma X_1 (azaz $n = 1$), ekkor $X_1 \sim \mathrm{POI}(1440)$, és

$$m = \mathbb{E}(X_1) = 1440, \qquad \sigma = \mathbb{D}(X_1) = \sqrt{1440}.$$

Alkalmazzuk a CHT-t $S = X_1$-re:

$$\mathbb{P}(S \geq 1500) = 1 - \mathbb{P}(S < 1500) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{1500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{1500 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1500 - 1 \cdot 1440}{\sqrt{1440} \cdot \sqrt{1}}\right)$$

$$\approx 1 - \Phi\,(1.58) = 1 - 0.9429 = 0.0571.$$

Pont ugyanazt az eredményt kapjuk. Igazából a CHT teljesül a nagy paraméterű Poisson eloszlásokra. Másképp mondva, ha n nagy, akkor $\mathrm{POI}(n)$ közel van egy (megfelelő várható értékű és szórású) normális eloszláshoz.

10. feladat

A (b) részhez a $\mathbb{P}(S \geq 1800)$ valószínűséget kell megbecsülnünk.

10. feladat

A (b) részhez a $\mathbb{P}(S \geq 1800)$ valószínűséget kell megbecsülnünk.

1800 messze van 1440-től; próbáljunk meg valami nagyeltérés tételt alkalmazni, pl. Hoeffding-et.

A (b) részhez a $\mathbb{P}(S \geq 1800)$ valószínűséget kell megbecsülnünk.

1800 messze van 1440-től; próbáljunk meg valami nagyeltérés tételt alkalmazni, pl. Hoeffding-et.

Hoeffding-hez kellene alsó és felső korlát minden egyes X_i-re. De a Poisson-eloszlás felülről nem korlátos, így Hoeffding nem alkalmazható.

10. feladat

Cramér következik. Az alapfelállás ugyanaz, mint elsőre:
$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 1440$ és $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$.

10. feladat

Cramér következik. Az alapfelállás ugyanaz, mint elsőre:
$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 1440$ és $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$.

$$\mathbb{P}(S \geq 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{1800}{1440}, \infty\right)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [1.25, \infty)\right)$$
$$\leq e^{-n \min_{x \in [1.25, \infty)} I(x)} = e^{-1440 I(1.25)}$$

mivel $[1.25, \infty)$ teljesen jobbra van $m = 1$-től.

10. feladat

Cramér következik. Az alapfelállás ugyanaz, mint elsőre: $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 1440$ és $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$.

$$\mathbb{P}(S \geq 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{1800}{1440}, \infty\right)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [1.25, \infty)\right)$$
$$\leq e^{-n \min_{x \in [1.25, \infty)} I(x)} = e^{-1440 I(1.25)}$$

mivel $[1.25, \infty)$ teljesen jobbra van $m = 1$-től.

$$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda,$$

amibe $\lambda = 1$-et és $x = 1.25$-öt kell behelyettesíteni; az eredmény

$$I(1.25) = 0.0289294$$

10. feladat

Cramér következik. Az alapfelállás ugyanaz, mint elsőre:
$S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 1440$ és $X_i \sim \mathrm{POI}(1)$.

$$\mathbb{P}(S \geq 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{1800}{1440}, \infty\right)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [1.25, \infty)\right)$$
$$\leq e^{-n \min_{x \in [1.25, \infty)} I(x)} = e^{-1440 I(1.25)}$$

mivel $[1.25, \infty)$ teljesen jobbra van $m = 1$-től.

$$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda,$$

amibe $\lambda = 1$-et és $x = 1.25$-öt kell behelyettesíteni; az eredmény

$$I(1.25) = 0.0289294$$

és így

$$\mathbb{P}(S \geq 1800) \leq e^{-1440 I(1.25)} \approx 8.09 \cdot 10^{-19}.$$

Második megoldás. Fogjuk össze ismét az összes hívást $S = X_1$-be $n = 1$-gyel; ekkor $X_1 \sim \mathrm{POI}(1440)$ és $m = \mathbb{E}(X_1) = 1440$.

Második megoldás. Fogjuk össze ismét az összes hívást $S = X_1$-be $n = 1$-gyel; ekkor $X_1 \sim \mathrm{POI}(1440)$ és $m = \mathbb{E}(X_1) = 1440$.

Cramér tetszőleges n-re alkalmazható:

$$\mathbb{P}(S \geq 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{1800}{1}, \infty\right)\right)$$
$$\leq e^{-n \min_{x \in [1800, \infty)} I(x)} = e^{-1 \cdot I(1800)},$$

ahol ezúttal $\lambda = 1440$ és $x = 1800$-at kell behelyettesíteni $I(x)$-be, ahonnan

$$I(1800) = 41.6584$$

10. feladat

Második megoldás. Fogjuk össze ismét az összes hívást $S = X_1$-be $n = 1$-gyel; ekkor $X_1 \sim \mathrm{POI}(1440)$ és $m = \mathbb{E}(X_1) = 1440$.

Cramér tetszőleges n-re alkalmazható:

$$\mathbb{P}(S \geq 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[\frac{1800}{1}, \infty\right)\right)$$
$$\leq e^{-n \min_{x \in [1800, \infty)} I(x)} = e^{-1 \cdot I(1800)},$$

ahol ezúttal $\lambda = 1440$ és $x = 1800$-at kell behelyettesíteni $I(x)$-be, ahonnan

$$I(1800) = 41.6584$$

és

$$\mathbb{P}(S \geq 1800) \leq e^{-1440 I(1.25)} \approx 8.09 \cdot 10^{-19}.$$

Harmadik megoldás. Az ötlet az, hogy tekintsük az érkezési időközöket a csomagok száma helyett. Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ az érkezési időközök az egymást követő csomagok között (percben). Ekkor $Y_i \sim \mathrm{EXP}(1)$.

Harmadik megoldás. Az ötlet az, hogy tekintsük az érkezési időközöket a csomagok száma helyett. Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ az érkezési időközök az egymást követő csomagok között (percben). Ekkor $Y_i \sim \mathrm{EXP}(1)$.

Az az esemény, hogy legalább 1800 csomag érkezik egy nap alatt, ekvivalens azzal, hogy

$$Y_1 + \cdots + Y_{1800} \leq 1440.$$

Harmadik megoldás. Az ötlet az, hogy tekintsük az érkezési időközöket a csomagok száma helyett. Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots$ az érkezési időközök az egymást követő csomagok között (percben). Ekkor $Y_i \sim \mathrm{EXP}(1)$.

Az az esemény, hogy legalább 1800 csomag érkezik egy nap alatt, ekvivalens azzal, hogy

$$Y_1 + \cdots + Y_{1800} \leq 1440.$$

Ennek megfelelően legyen

$$S = Y_1 + \cdots + Y_n,$$

ahol most $n = 1800$, és amit becsülni akarunk, az

$$\mathbb{P}(S \leq 1440).$$

10. feladat

Tehát most $n = 1800$, $Y_1, \ldots, Y_n$ EXP(1) eloszlásúak $m = 1$ várható értékkel, és

$$\mathbb{P}(S \leq 1440) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[0, \frac{1440}{1800}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [0, 0.8]\right).$$

10. feladat

Tehát most $n = 1800$, $Y_1, \ldots, Y_n$ EXP(1) eloszlásúak $m = 1$ várható értékkel, és

$$\mathbb{P}(S \leq 1440) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[0, \frac{1440}{1800}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [0, 0.8]\right).$$

Cramér szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [0, 0.8]\right) \leq e^{-n \min_{x \in [0,0.8]} I(x)} = e^{-nI(0.8)}$$

mivel $[0, 0.8]$ teljesen balra van $m = 1$-től,

10. feladat

Tehát most $n = 1800$, $Y_1, \ldots, Y_n$ EXP(1) eloszlásúak $m = 1$ várható értékkel, és

$$\mathbb{P}(S \leq 1440) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[0, \frac{1440}{1800}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [0, 0.8]\right).$$

Cramér szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [0, 0.8]\right) \leq e^{-n \min_{x \in [0,0.8]} I(x)} = e^{-nI(0.8)}$$

mivel $[0, 0.8]$ teljesen balra van $m = 1$-től, ahol

$$I(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$$

$\mu = 1$ paraméterrel.

10. feladat

Tehát most $n = 1800$, $Y_1, \dots, Y_n$ EXP(1) eloszlásúak $m = 1$ várható értékkel, és

$$\mathbb{P}(S \leq 1440) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in \left[0, \frac{1440}{1800}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [0, 0.8]\right).$$

Cramér szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S}{n} \in [0, 0.8]\right) \leq e^{-n \min_{x \in [0,0.8]} I(x)} = e^{-nI(0.8)}$$

mivel $[0, 0.8]$ teljesen balra van $m = 1$-től, ahol

$$I(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$$

$\mu = 1$ paraméterrel.

Tehát $x = 0.8$ és $\mu = 1$ értékeket kell behelyettesíteni $I(x)$-be:

$$I(0.8) = 0.0231436$$

és

$$\mathbb{P}(S \leq 1440) \leq e^{-1800 I(0.8)} \approx 8.09 \cdot 10^{-19}.$$

10. feladat

Cramér numerikus instabilitásához:

$$
\begin{aligned}
e^{-1800\cdot 0.0231436} &\approx 8.09 \cdot 10^{-19},\\
e^{-1800\cdot 0.02} &\approx 2.32 \cdot 10^{-16},\\
e^{-1800\cdot 0.023} &\approx 1.05 \cdot 10^{-18}.
\end{aligned}
$$

Tétel. (Centrális határeloszlás-tétel (CHT))

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ fae valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(X_1) = m$ és $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$, és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Ekkor

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \Phi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

amint $n \to \infty$, ahol $\Phi(x)$ az N(0,1) eloszlásfüggvénye.

Centrális határeloszlás-tétel

CHT biz., eggyel kevésbé vázlatos változat. Egy X valószínűségi változó Fourier-transzformáltja (vagy más néven karakterisztikus függvénye)

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

CHT biz., eggyel kevésbé vázlatos változat. Egy X valószínűségi változó Fourier-transzformáltja (vagy más néven karakterisztikus függvénye)

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}).$$

$\phi_X(t)$ komplex értékű függvény. Alaptulajdonságok:

- $\phi_X(0) = 1$
- $|\phi_X(t)| \leq 1 \, \forall t \in \mathbb{R}$
- $\phi_X(t)$ valós minden valós t-re $\iff$ X eloszlása szimmetrikus a 0-ra.

Példa. Az $N(0,1)$ eloszlás karakterisztikus függvénye $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Tétel. (Lévy folytonossági tétel)

Legyen X_n valószínűségi változók egy sorozata. Ha a $\phi_{X_n}(t)$ függvénysorozat pontonként konvergál egy $\phi(t)$ függvényhez a teljes komplex számsíkon, amint $n \to \infty$, és $\phi(t)$ folytonos a 0-ban, akkor $\phi(t)$ egy Y valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, és

$$X_n \xrightarrow{d} Y.$$

Nem biz.

Tétel. (Lévy folytonossági tétel)

Legyen X_n valószínűségi változók egy sorozata. Ha a $\phi_{X_n}(t)$ függvénysorozat pontonként konvergál egy $\phi(t)$ függvényhez a teljes komplex számsíkon, amint $n \to \infty$, és $\phi(t)$ folytonos a 0-ban, akkor $\phi(t)$ egy Y valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, és

$$X_n \xrightarrow{d} Y.$$

Nem biz.

Vissza a CHT bizonyításhoz. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ fae valószínűségi változók, melyekre $\mathbb{E}(X_1) = m$ és $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$. Feltehető, hogy $m = 0$ (különben kivonhatunk m-et minden tagból, mert a várható érték lineáris).

Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Az $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét kiszámoljuk és másodrendig sorba fejtjük:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{it(X_1 + \cdots + X_n)}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) =$$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itX_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) \ldots \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itX_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itX_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right)^n;$$

a függetlenség miatt a várható érték szorzatra bomlik.

Centrális határeloszlás-tétel

Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Az $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét kiszámoljuk és másodrendig sorba fejtjük:

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{it(X_1 + \cdots + X_n)}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) =$$

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itX_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) \ldots \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itX_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itX_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)\right)^n;$$

a függetlenség miatt a várható érték szorzatra bomlik.

Az $\exp(itx)$ függvény sora (másodrendig):

$$\exp(itx) = 1 + itx - t^2x^2 + o(x^2),$$

ahonnan

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itX_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = 1 + \frac{it}{\sigma\sqrt{n}}\underbrace{\mathbb{E}(X_1)}_{0} - \frac{t^2}{\sigma^2 n}\underbrace{\mathbb{E}(X_1^2)}_{\sigma^2} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Végül

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \left(1 - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ azonosság miatt.

Végül

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right) = \left(1 - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$$

az $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ azonosság miatt.

$\exp\left(\frac{-t^2}{2}\right)$ pedig pont az $N(0,1)$ karakterisztikus függvénye, így

$$\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0,1).$$