Markov-láncok

Sztochasztika

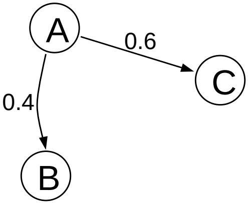
Horváth Illés

2024/11/07

Véletlenszerűen változó rendszer

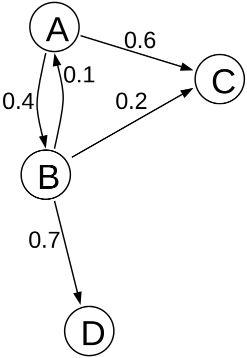
Egy rendszer elindul egy A állapotból.

Ezután B vagy C állapotba léphet (0.4 és 0.6 valószínűséggel).

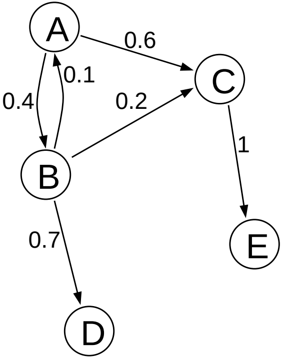


Véletlenszerűen változó rendszer

B-ből A, C, D valamelyikébe léphet véletlenszerűen.

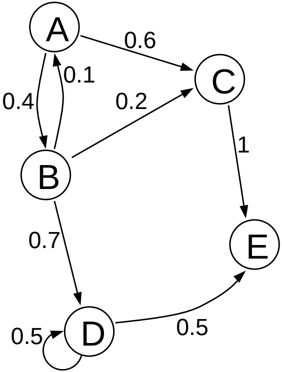


C-ből csak E-be léphet.

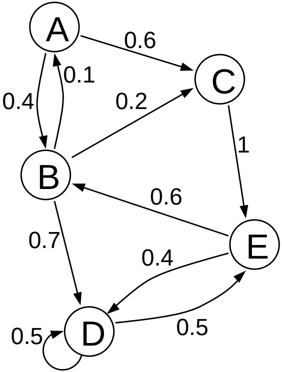


Véletlenszerűen változó rendszer

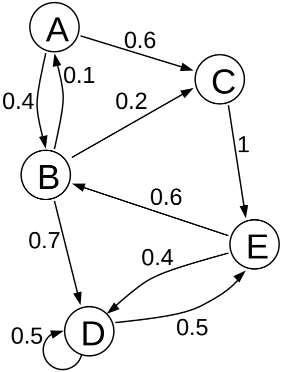
D-ből átléphet E-be vagy maradhat D-ben is.



Ez egy Markov-lánc.



Egy lehetséges realizáció



Egy lehetséges realizáció: A, B, D, D, E, D, E, B, C, E, B, A, C ...

Markov-lánc

A Markov-lánc egy rendszer, ami véletlenszerűen változtatja az állapotát.

A következő állapot csak a jelenlegi állapottól függ, az előzményektől nem. Ez a *Markov tulajdonság*.

Markov-lánc

A Markov-lánc egy rendszer, ami véletlenszerűen változtatja az állapotát.

A következő állapot csak a jelenlegi állapottól függ, az előzményektől nem. Ez a *Markov tulajdonság*.

A Markov tulajdonság egyfajta memóriamentesség: a rendszer további viselkedéséhez nem kell ismerni a múltat, csak a jelenlegi állapotot.

A Markov-lánc egy rendszer, ami véletlenszerűen változtatja az állapotát.

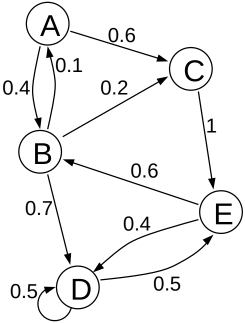
A következő állapot csak a jelenlegi állapottól függ, az előzményektől nem. Ez a *Markov tulajdonság*.

A Markov tulajdonság egyfajta memóriamentesség: a rendszer további viselkedéséhez nem kell ismerni a múltat, csak a jelenlegi állapotot.

Egy Markov-lánc megadásához a következő információkra van szükség:

- állapotok listája (pl. A, B, C, D, E),
- kezdeti állapot, és
- vagy egy irányított gráf, átmenetvalószínűségekkel az éleken (mint az előző példában), vagy egy P *átmenet-valószínűség mátrix*.

A P mátrix (i, j) eleme annak a valószínűsége, hogy a Markov-lánc a j állapotba lép következőnek, feltéve, hogy most az i állapotban van.



	A	B	C	D	E
A	0	0.4	0.6	0	0
B	0.1	0	0.2	0.7	0
C	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0.5	0.5
E	0	0.6	0	0.4	0

Sztochasztikus mátrix

A P átmenet-valószínűség mátrix tulajdonságai:

- elemei nemnegatívak:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j,$$

- minden egyes sor összege 1:

$$\sum_i p_{ij} = 1.$$

Sztochasztikus mátrix

A P átmenet-valószínűség mátrix tulajdonságai:

- elemei nemnegatívak:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j,$$

- minden egyes sor összege 1:

$$\sum_i p_{ij} = 1.$$

Bármely mátrix, ami a fenti tulajdonságokat teljesíti, egy alkalmas átmenet-valószínűség mátrix. A fenti tulajdonságokat teljesítő négyzetes mátrixokat *sztochasztikus mátrixnak* nevezzük.

Kezdeti eloszlás vektor

A kezdeti állapotot megadhatjuk vektor formában is, pl. ha a kezdeti állapot A, akkor a kezdeti eloszlás vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kezdeti eloszlás vektor

A kezdeti állapotot megadhatjuk vektor formában is, pl. ha a kezdeti állapot A, akkor a kezdeti eloszlás vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel a kezdeti állapot lehet véletlenszerű is, pl.

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

azt jelenti, hogy a Markov-lánc A-ból vagy C-ből indul $1/2$ valószínűséggel.

Kezdeti eloszlás vektor

A kezdeti állapotot megadhatjuk vektor formában is, pl. ha a kezdeti állapot A, akkor a kezdeti eloszlás vektor

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel a kezdeti állapot lehet véletlenszerű is, pl.

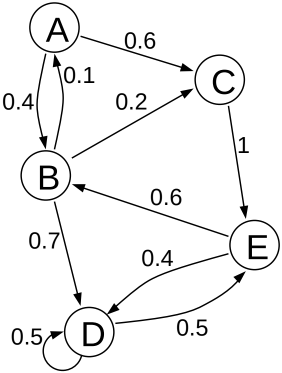
$$v_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

azt jelenti, hogy a Markov-lánc A-ból vagy C-ből indul $1/2$ valószínűséggel.

v_0 elemei nemnegatívak, összegük 1.

Állapot-valószínűségek

Tegyük fel, hogy a Markov-lánc A-ból indul. Hol lehet 1 lépés után? És 2 lépés után?



Állapot-valószínűségek

1 lépés után az állapot véletlenszerű. A példában lehet B 0.4 valószínűséggel vagy C 0.6 valószínűséggel, azaz az állapotvektor 1 lépés után

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 lépés után az állapot véletlenszerű. A példában lehet B 0.4 valószínűséggel vagy C 0.6 valószínűséggel, azaz az állapotvektor 1 lépés után

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 lépés utáni lehetőségek:

- A→B→A $0.4 \cdot 0.1$ valószínűséggel, vagy
- A→B→C $0.4 \cdot 0.2$ valószínűséggel, vagy
- A→B→D $0.4 \cdot 0.7$ valószínűséggel, vagy
- A→C→E $0.6 \cdot 1$ valószínűséggel.

Tehát

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0.08 & 0.28 & 0.60 \end{pmatrix}.$$

Általában v_n a következő módon számítható ki.

Lemma

$$v_n = v_{n-1} \cdot P = v_0 \cdot P^n$$

Állapot-valószínűségek

Általában v_n a következő módon számítható ki.

Lemma

$$v_n = v_{n-1} \cdot P = v_0 \cdot P^n$$

Biz (vázlat). A $v_{n-1} \cdot P$ szorzat a teljes valószínűség tétele alapján számítja ki az n lépés utáni állapot-valószínűségeket az $n-1$ lépés utáni állapot-valószínűségek szerint.

Állapot-valószínűségek

Például a

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kezdeti vektorra és

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

átmenet-valószínűség mátrixra

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

és

$$v_2 = v_1 \cdot P = v_0 \cdot P^2 = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0.08 & 0.28 & 0.60 \end{pmatrix}.$$

Mátrix-szorzás

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mátrix-szorzás

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

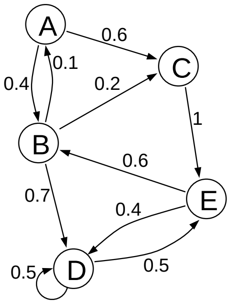
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0.08 & 0.28 & 0.60 \end{pmatrix}$$

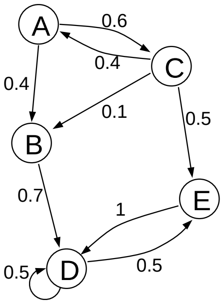
Kapcsolati osztályok

Ha két állapot olyan, hogy bármelyikből el lehet jutni a másikba véges sok lépésben pozitív valószínűséggel, akkor ők egy kapcsolati osztályba (communicating class) tartoznak.

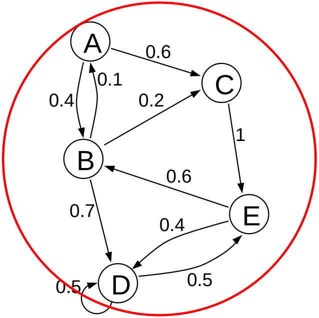
Kapcsolati osztályok

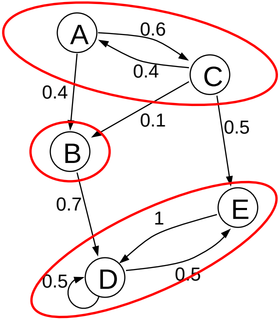
Ha két állapot olyan, hogy bármelyikből el lehet jutni a másikba véges sok lépésben pozitív valószínűséggel, akkor ők egy kapcsolati osztályba (communicating class) tartoznak.



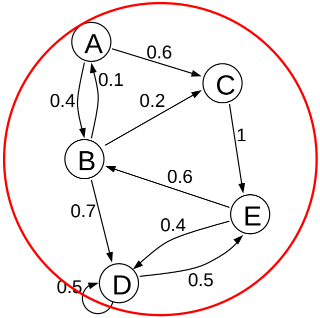


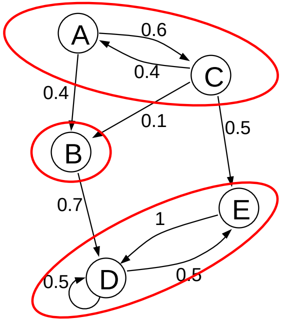
Ha két állapot olyan, hogy bármelyikből el lehet jutni a másikba véges sok lépésben pozitív valószínűséggel, akkor ők egy kapcsolati osztályba (communicating class) tartoznak.





Ha egy Markov-láncnak egyetlen osztálya van, vagy egyszerűen mondva bárhonnan bárhová el lehet jutni, akkor *irreducibilis*. Ha több kapcsolati osztály is van, akkor *reducibilis*.

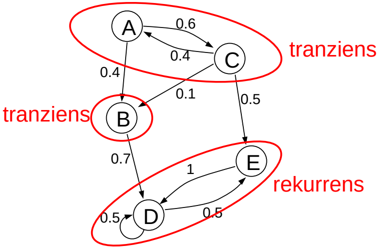




Rekurrens és tranziens osztályok

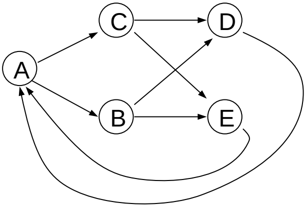
Az olyan osztályok, amelyekből semmilyen átmenet nem vezet ki, *rekurrens osztályok*, és a bennük lévő állapotok *rekurrens állapotok*.

Az olyan osztályok, ahonnan legalább egy átmenet kivezet, *tranziens osztályok*, és a bennük lévő állapotok *tranziens állapotok*.



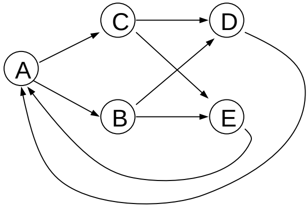
Periodicitás

Az alábbi Markov-lánc irreducibilis-e?



Periodicitás

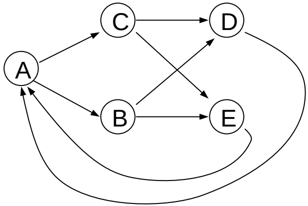
Az alábbi Markov-lánc irreducibilis-e?



Igen, irreducibilis. Bármelyik állapotból bármelyik másikba el lehet jutni.

Periodicitás

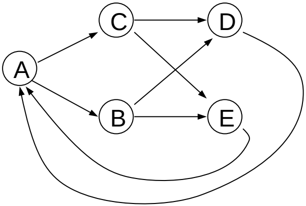
Az alábbi Markov-lánc irreducibilis-e?



Igen, irreducibilis. Bármelyik állapotból bármelyik másikba el lehet jutni.

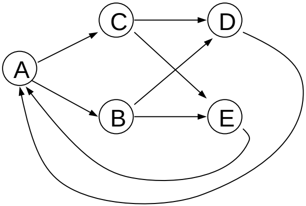
Az A állapotból indulva hány lépés múlva juthatunk vissza megint az A állapotba?

Periodicitás



Az A állapotból indulva visszatérhetünk az A állapotba 3, 6, 9,. . . lépés múlva.

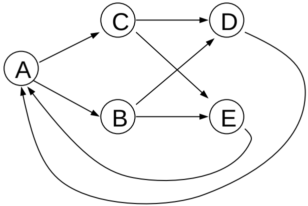
Periodicitás



Az A állapotból indulva visszatérhetünk az A állapotba 3, 6, 9,. . . lépés múlva.

A B állapotból indulva a B állapotba visszatérés is 3, 6, 9,. . . lépés múlva lehetséges.

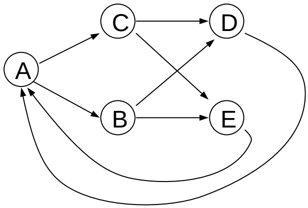
Periodicitás



Az A állapotból indulva visszatérhetünk az A állapotba 3, 6, 9,... lépés múlva.

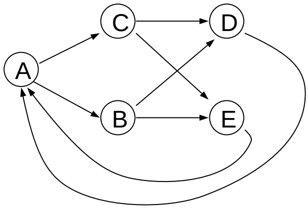
A B állapotból indulva a B állapotba visszatérés is 3, 6, 9,... lépés múlva lehetséges. Sőt, ez igaz bármelyik állapotra.

Periodicitás



Ha egy irreducibilis Markov-láncban az A állapotból indulva ugyanoda csak valamely $d > 1$ többszöröse számú lépésben lehet visszajutni, akkor a Markov-lánc *periodikus d periódussal*. A periódus ugyanakkora az összes állapotra.

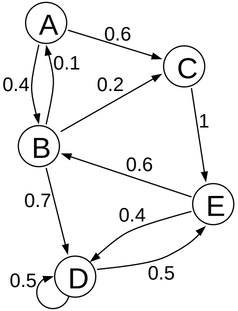
Periodicitás



Ha egy irreducibilis Markov-láncban az A állapotból indulva ugyanoda csak valamely $d > 1$ többszöröse számú lépésben lehet visszajutni, akkor a Markov-lánc *periodikus d periódussal*. A periódus ugyanakkora az összes állapotra.

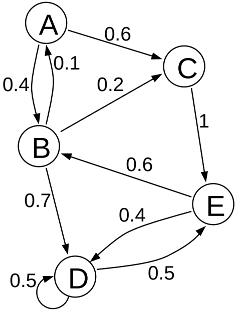
A fenti példa Markov-lánc periodikus, a periódus hossza 3.

Periodicitás



A fenti Markov-láncban D-ből indulva visszatérhetünk D-be 1, vagy 2, vagy 3 stb. lépésben is. Ez egy *aperiodikus* Markov-lánc.

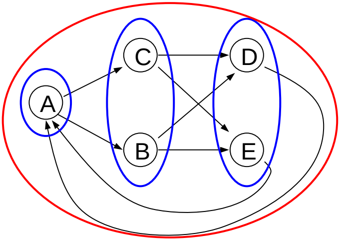
Periodicitás



A fenti Markov-láncban D-ből indulva visszatérhetünk D-be 1, vagy 2, vagy 3 stb. lépésben is. Ez egy *aperiodikus* Markov-lánc.

(Az aperiodikus esetre gondolhatunk úgy is, hogy $d = 1$.)

Periodicitás



Egy periodikus Markov-láncban az állapotok feloszthatóak *d periodicitási osztályra*. Ezek nem ugyanazok, mint a kapcsolati osztályok! A fenti Markov-lánc irreducibilis, egyetlen kapcsolati osztályból áll (ami minden állapotot tartalmaz), ugyanakkor 3 periodicitási osztályból áll.

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

(Ez az időjárásnak egy erősen egyszerűsített modellje.)

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

(Ez az időjárásnak egy erősen egyszerűsített modellje.)

2 állapot van: esős és napos. Az átmenet-valószínűség mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Példa

Londonban egy esős napot 70% eséllyel követ egy újabb esős nap, 30% eséllyel pedig napsütéses nap. Egy napsütéses napot 50% eséllyel követ egy újabb napsütéses nap és 50% eséllyel esős nap. Tegyük fel, hogy ma esős nap van. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 nap múlva esős nap lesz? És 3 nap múlva? Számítsuk ki, hogy a stacionárius eloszlás szerint mekkora az esős nap valószínűsége.

(Ez az időjárásnak egy erősen egyszerűsített modellje.)

2 állapot van: esős és napos. Az átmenet-valószínűség mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Ma esik, tehát

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 \end{pmatrix}.$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 \end{pmatrix}.$$

$$v_3 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.628 & 0.372 \end{pmatrix}.$$

Példa

Ekkor

$$v_1 = v_0 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.36 \end{pmatrix}.$$

$$v_3 = v_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0.628 & 0.372 \end{pmatrix}.$$

Úgy néz ki, mintha konvergálnának. Vajon hová?

Stacionárius eloszlás

$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{pmatrix}$ *stacionárius vektor* vagy *stacionárius eloszlás*, ha

$$v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}},$$

$x_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, k)$ és

$$x_1 + \dots + x_k = 1.$$

Stacionárius eloszlás

$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{pmatrix}$ *stacionárius vektor* vagy *stacionárius eloszlás*, ha

$$v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}},$$

$x_i \geq 0 \ (i = 1, \dots, k)$ és

$$x_1 + \dots + x_k = 1.$$

Ha egy Markov-láncot $v_0 = v_{\mathrm{st}}$-ből indítunk, akkor

$$v_1 = v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}}$$

és így tovább, tehát

$$v_n = v_{\mathrm{st}} \quad \forall n.$$

Egy Markov-lánc stacionárius, ha stacionárius vektorból indul.

Hosszú távú viselkedés

Tétel. (Perron–Frobenius)

(a) *Minden (véges állapotterű) Markov-láncnak van legalább egy stacionárius vektora.*

(b) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis, akkor v_{st} egyértelmű és elemei szigorúan pozitívak.*

(c) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor*

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v_{st}$$

tetszőleges v_0 kezdeti vektorra.

Hosszú távú viselkedés

Tétel. (Perron–Frobenius)

(a) *Minden (véges állapotterű) Markov-láncnak van legalább egy stacionárius vektora.*

(b) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis, akkor v_{st} egyértelmű és elemei szigorúan pozitívak.*

(c) *Ha egy Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_{st}$$

tetszőleges v_0 kezdeti vektorra.

Nem biz., de a lényeg: a stacionárius vektor a P mátrix 1 sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora; az összes többi sajátérték a (b) esetben legfeljebb 1 abszolútértékű, a (c) esetben szigorúan kisebb, mint 1 abszolútértékű.

Példa

Ha

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

akkor $v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$-re teljesül a definíció alapján

$$\begin{aligned} 0.7x_1 + 0.5x_2 &= x_1 \\ 0.3x_1 + 0.5x_2 &= x_2 \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}$$

Példa

Ha

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix},$$

akkor $v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \;\; x_2 \,)$-re teljesül a definíció alapján

$$\begin{aligned} 0.7x_1 + 0.5x_2 &= x_1 \\ 0.3x_1 + 0.5x_2 &= x_2 \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}$$

aminek a megoldása $x_1 = 5/8 = 0.625$ és $x_2 = 3/8 = 0.375$, és így

$$v_{\mathrm{st}} = (\, 0.625 \;\; 0.375 \,).$$

A stacionárius eloszlás kiszámítása

A stacionárius eloszlás kiszámításához egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{st}} \cdot P &= v_{\mathrm{st}}, \\ x_1 + \cdots + x_k &= 1. \end{aligned}$$

A stacionárius eloszlás kiszámítása

A stacionárius eloszlás kiszámításához egy lineáris egyenletrendszert kell megoldani:

$$v_{\mathrm{st}} \cdot P = v_{\mathrm{st}},$$
$$x_1 + \cdots + x_k = 1.$$

Az általános, mindig használható módszer a Gauss-elimináció. (Speciális esetekben esetleg egyszerűbben is megoldható.)

Hosszú távú viselkedés

Tehát ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v_{\mathrm{st}}.$$

Hosszú távú viselkedés

Tehát ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n = \nu_{\mathrm{st}}.$$

A konvergencia exponenciálisan gyors (nem biz., de a P mátrix második legnagyobb abszolútértékű sajátértéke az exponens); kis állapottér ($k \leq 5$ körül) általában már $n \geq 10$ esetén jó közelítéssel

$$\nu_n \approx \nu_{\mathrm{st}}.$$

Nagy állapottér esetén általában nehéz kérdés, hogy mikortól teljesül; kulcsszó: Markov chain mixing time.

Hosszú távú viselkedés

Tehát ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v_{\mathrm{st}}.$$

A konvergencia exponenciálisan gyors (nem biz., de a P mátrix második legnagyobb abszolútértékű sajátértéke az exponens); kis állapottér ($k \le 5$ körül) általában már $n \ge 10$ esetén jó közelítéssel

$$v_n \approx v_{\mathrm{st}}.$$

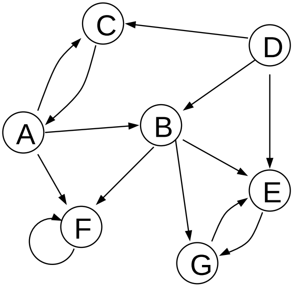
Nagy állapottér esetén általában nehéz kérdés, hogy mikortól teljesül; kulcsszó: Markov chain mixing time.

A Perron–Frobenius tétel (c) része ekvivalens a következővel:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix}.$$

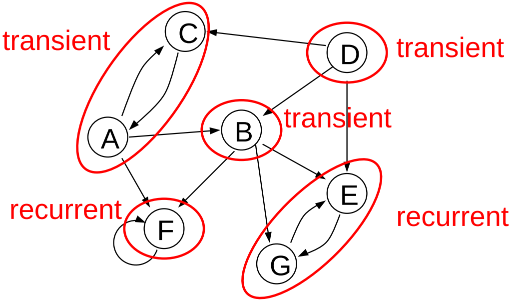
Reducibilis Markov-láncok

Bármely reducibilis Markov-lánc előbb-utóbb eljut az egyik rekurrens osztályba és ott marad örökre.



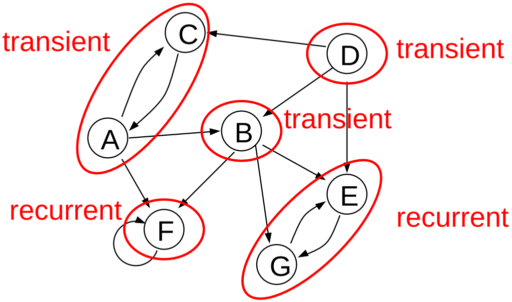
Reducibilis Markov-láncok

Bármely reducibilis Markov-lánc előbb-utóbb eljut az egyik rekurrens osztályba és ott marad örökre.



Reducibilis Markov-láncok

Tulajdonképpen minden egyes rekurrens osztály egy kisebb, irreducibilis Markov-láncnak tekinthető.



Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Egy tranziens állapot valószínűsége bármely stacionárius eloszlásban 0.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Egy tranziens állapot valószínűsége bármely stacionárius eloszlásban 0.

Egy reducibilis Markov-láncra is teljesül, hogy v_n konvergál valamelyik stacionárius vektorhoz – de hogy melyikhez, az lehet véletlenszerű is.

Reducibilis Markov-láncok

Reducibilis Markov-lánc esetén minden rekurrens osztályhoz tartozik egy egyértelmű stacionárius vektor.

A nagy Markov-lánc stacionárius vektorai ezeknek a konvex lineáris kombinációi.

Egy tranziens állapot valószínűsége bármely stacionárius eloszlásban 0.

Egy reducibilis Markov-láncra is teljesül, hogy v_n konvergál valamelyik stacionárius vektorhoz – de hogy melyikhez, az lehet véletlenszerű is.

Mi általában irreducibilis Markov-láncokra szorítkozunk.

Stacionárius vektor további értelmezései

Egy irreducibilis, aperiodikus Markov-láncra

$$v_n \longrightarrow v_{\mathrm{st}}$$

tetszőleges v_0 esetén. Ez azt jelenti, hogy hosszú távon a Markov-lánc „elfelejti" a kezdeti állapotot, és közel lesz a stacionárius állapothoz. Emiatt sok esetben, amikor a Markov-lánc hosszú ideje zajlik, a kezdeti állapot irreleváns, mivel a Markov-lánc úgyis stacionárius lesz.

Stacionárius vektor további értelmezései

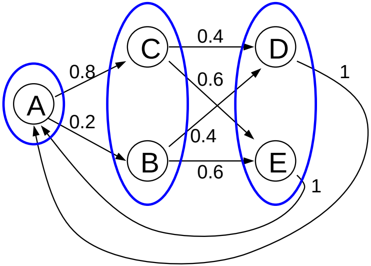
Egy irreducibilis, aperiodikus Markov-láncra

$$v_n \longrightarrow v_{\mathrm{st}}$$

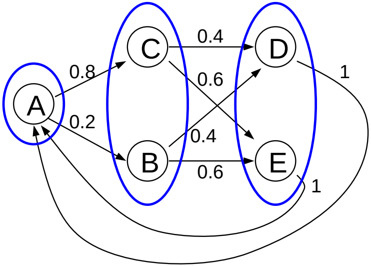
tetszőleges v_0 esetén. Ez azt jelenti, hogy hosszú távon a Markov-lánc „elfelejti” a kezdeti állapotot, és közel lesz a stacionárius állapothoz. Emiatt sok esetben, amikor a Markov-lánc hosszú ideje zajlik, a kezdeti állapot irreleváns, mivel a Markov-lánc úgyis stacionárius lesz.

Mi a helyzet irreducibilis, periodikus Markov-láncokra?

Periodikus Markov-láncok

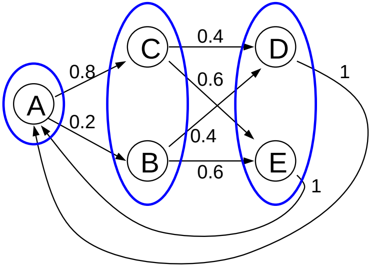


Periodikus Markov-láncok



Egy lehetséges realizáció: A, C, D, A, C, E, A, B, E, A, C, E, A, . . .

Periodikus Markov-láncok



Egy lehetséges realizáció: A, C, D, A, C, E, A, B, E, A, C, E, A, . . .

Minden harmadik állapot A, utána mindig B vagy C, azután pedig D vagy E következik.

Periodikus Markov-láncok

Egy irreducibilis, periodikus Markov-láncra v_{st} egyértelmű. A fenti Markov-láncra

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix}.$$

Egy irreducibilis, periodikus Markov-láncra v_{st} egyértelmű. A fenti Markov-láncra

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix}.$$

Ha a periódus d, v_{st} $\frac{1}{d}$ valószínűséget rendel minden egyes periodicitási osztályhoz:

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \underbrace{\frac{1}{15} \quad \frac{4}{15}}_{\frac{1}{3}} & \underbrace{\frac{14}{75} \quad \frac{11}{75}}_{\frac{1}{3}} \end{pmatrix}.$$

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

A periodicitási osztályokat jelöljük $1, \ldots, d$-vel. Ha a Markov-lánc az 1-es osztályból indult, akkor nd lépés után mindig újra az 1-es osztályban lesz, $nd + 1$ lépés után mindig a 2-es osztályban lesz, és így tovább.

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

A periodicitási osztályokat jelöljük $1, \ldots, d$-vel. Ha a Markov-lánc az 1-es osztályból indult, akkor nd lépés után mindig újra az 1-es osztályban lesz, $nd + 1$ lépés után mindig a 2-es osztályban lesz, és így tovább.

Teljesül a következő: nagy n-re, v_n értéke közelítőleg v_{st}, *feltéve, hogy abban a periodicitási osztályban van, ahol n lépés után lehet*.

Egy periodikus Markov-lánc nem „felejti el” a kezdeti állapotot teljesen.

A periodicitási osztályokat jelöljük $1, \dots, d$-vel. Ha a Markov-lánc az 1-es osztályból indult, akkor nd lépés után mindig újra az 1-es osztályban lesz, $nd + 1$ lépés után mindig a 2-es osztályban lesz, és így tovább.

Teljesül a következő: nagy n-re, v_n értéke közelítőleg v_{st}, *feltéve, hogy abban a periodicitási osztályban van, ahol n lépés után lehet.*

Ez a feltételes eloszlás megkapható úgy is, hogy v_{st} többi osztálybeli elemeit kinullázzuk, majd beszorozzuk d-vel.

Periodikus Markov-láncok

A korábbi periodikus Markov-lánc példájára $d = 3$, és

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix}.$$

Ha a Markov-lánc az 1-es állapotból indult, akkor $3n$ lépés után csak az 1-es állapotban lehet, és

$$v_{3n} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \overset{0}{\cancel{\frac{1}{15}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{4}{15}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{14}{75}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{11}{75}}} \end{pmatrix} = (\,1\ 0\ 0\ 0\ 0\,).$$

$3n + 1$ lépés után csak a 2-es periodicitási osztályban lehet, és

$$v_{3n+1} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3}}} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \overset{0}{\cancel{\frac{14}{75}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{11}{75}}} \end{pmatrix} = (\,0\ \tfrac{1}{5}\ \tfrac{4}{5}\ 0\ 0\,).$$

Periodikus Markov-láncok

$3n + 2$ lépés után pedig csak a 3-as periodicitási osztályban lehet, és így

$$v_{3n+2} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \cancelto{0}{\frac{1}{3}} & \cancelto{0}{\frac{1}{15}} & \cancelto{0}{\frac{4}{15}} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{14}{25} & \frac{11}{25} \end{pmatrix}.$$

Periodikus Markov-láncok

$3n + 2$ lépés után pedig csak a 3-as periodicitási osztályban lehet, és így

$$v_{3n+2} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{1}{15}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{4}{15}}} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix} = \left(0 \; 0 \; 0 \; \frac{14}{25} \; \frac{11}{25} \right).$$

Ha a Markov-lánc a 2-es periodicitási osztályból indult, akkor $3n$ lépés után csak a 2-es periodicitási osztályban lehet, tehát ilyenkor

$$v_{3n} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3}}} & \frac{1}{15} & \frac{4}{15} & \overset{0}{\cancel{\frac{14}{75}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{11}{75}}} \end{pmatrix} = \left(0 \; \frac{1}{5} \; \frac{4}{5} \; 0 \; 0 \right).$$

Hasonlóan

$$v_{3n+1} \approx 3 \cdot \begin{pmatrix} \overset{0}{\cancel{\frac{1}{3}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{1}{15}}} & \overset{0}{\cancel{\frac{4}{15}}} & \frac{14}{75} & \frac{11}{75} \end{pmatrix} = \left(0 \; 0 \; 0 \; \frac{14}{25} \; \frac{11}{25} \right),$$

stb.; a közelítés módja tolódik a kezdeti osztálynak megfelelően.

Stacionárius vektor értelmezései

Mi egyebet árul még el a stacionárius vektor? Legyen

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \end{pmatrix}.$$

Stacionárius vektor értelmezései

Mi egyebet árul még el a stacionárius vektor? Legyen

$$v_{\mathrm{st}} = \left(x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_k \right).$$

Lemma

Egy irreducibilis Markov-lánc esetén hosszú távon az i állapotban töltött lépések aránya az összeshez képest x_i.

Stacionárius vektor értelmezései

Mi egyebet árul még el a stacionárius vektor? Legyen

$$v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_k \,).$$

Lemma

Egy irreducibilis Markov-lánc esetén hosszú távon az i állapotban töltött lépések aránya az összeshez képest x_i.

Lemma

Egy irreducibilis Markov-lánc esetén az átlagos lépésszám két i-be történő visszatérés között $\frac{1}{x_i}$.

Mindkét lemma érvényes periodikus és aperiodikus Markov-láncokra is.

A londoni időjárás példájánál legyenek az állapotok 1: esős, 2: napos. Ekkor egy lehetséges realizáció

$$1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \dots$$

Stacionárius vektor értelmezések

A londoni időjárás példájánál legyenek az állapotok 1: esős, 2: napos. Ekkor egy lehetséges realizáció

$$1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \ldots$$

Az első lemma azt mondja, hogy hosszú távon az 1-esek, azaz az esős napok aránya $x_1 = 0.625$.

Stacionárius vektor értelmezések

A londoni időjárás példájánál legyenek az állapotok 1: esős, 2: napos. Ekkor egy lehetséges realizáció

$$1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 2, \dots$$

Az első lemma azt mondja, hogy hosszú távon az 1-esek, azaz az esős napok aránya $x_1 = 0.625$.

A második lemma azt mondja, hogy az átlagos lépésszám két 1-es között (vagyis az, hogy átlagosan hány naponta esik) $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{0.625} = 1.6$.

Ergodtétel

A következő tétel lényegében a Nagy számok törvénye irreducibilis Markov-láncokra.

Ergodtétel

A következő tétel lényegében a Nagy számok törvénye irreducibilis Markov-láncokra.

Tétel. (Ergodtétel)

Jelölje egy Markov-lánc realizációját (az állapotok sorozatát)

$$X_1, X_2, \ldots$$

Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor bármilyen, az állapotokon adott f függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(X_1) + \cdots + f(X_n)}{n} = \mathbb{E}_{st}(f),$$

ahol

$$\mathbb{E}_{st}(f) = x_1 f(1) + \cdots + x_k f(k),$$

ahol

$$v_{st} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_k \end{pmatrix}.$$

Példa

Londonban egy fagyiárus egy esős napon átlagosan 120 font értékben ad el fagyit, de egy napos napon átlagosan 800 font értékben. Mennyi a hosszú távú átlagos napi bevétele a fagyiból?

Példa

Londonban egy fagyiárus egy esős napon átlagosan 120 font értékben ad el fagyit, de egy napos napon átlagosan 800 font értékben. Mennyi a hosszú távú átlagos napi bevétele a fagyiból?

Az állapotok ismét 1: esős és 2: napos. Legyen az f függvény

$$f(1) = 120, \qquad f(2) = 800.$$

Londonban egy fagyiárus egy esős napon átlagosan 120 font értékben ad el fagyit, de egy napos napon átlagosan 800 font értékben. Mennyi a hosszú távú átlagos napi bevétele a fagyiból?

Az állapotok ismét 1: esős és 2: napos. Legyen az f függvény

$$f(1) = 120, \qquad f(2) = 800.$$

Ekkor az ergodtétel pont azt mondja, hogy a hosszú távú átlagos napi bevétel a fagyiból

$$\mathbb{E}_{\mathrm{st}}(f) = x_1 f(1) + x_2 f(2) = 0.625 \cdot 120 + 0.375 \cdot 800 = 375$$

(font per nap).

Centrális határeloszlás tétel láncokra

Az ergodtétel a Nagy számok törvényének megfelelője Markov-láncokra.

Centrális határeloszlás tétel láncokra

Az ergodtétel a Nagy számok törvényének megfelelője Markov-láncokra.

Vajon a centrális határeloszlás tétel is teljesül Markov-láncokra?

Centrális határeloszlás tétel láncokra

Az ergodtétel a Nagy számok törvényének megfelelője Markov-láncokra.

Vajon a centrális határeloszlás tétel is teljesül Markov-láncokra?

Igen, teljesül! Egészen pontosan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{f(X_1)+\cdots+f(X_n)-n\cdot\mathbb{E}_{\mathrm{st}}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Centrális határeloszlás tétel láncokra

Az ergodtétel a Nagy számok törvényének megfelelője Markov-láncokra.

Vajon a centrális határeloszlás tétel is teljesül Markov-láncokra?

Igen, teljesül! Egészen pontosan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{f(X_1) + \cdots + f(X_n) - n \cdot \mathbb{E}_{\mathrm{st}}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n}} < x \right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Egy nehézség van: $\sigma(f)$ értékét bonyolult kiszámítani ($\sigma(f)$ *nem* a stacionárius eloszlás szerinti szórás).

Centrális határeloszlás tétel láncokra

Az ergodtétel a Nagy számok törvényének megfelelője Markov-láncokra.

Vajon a centrális határeloszlás tétel is teljesül Markov-láncokra?

Igen, teljesül! Egészen pontosan

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{f(X_1) + \dots + f(X_n) - n \cdot \mathbb{E}_{\mathrm{st}}(f)}{\sigma(f)\sqrt{n}} < x\right) = \Phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Egy nehézség van: $\sigma(f)$ értékét bonyolult kiszámítani ($\sigma(f)$ *nem* a stacionárius eloszlás szerinti szórás).

Összességében a Markov-lánc CHT nem igazán praktikus; nem fogjuk használni.

Összefoglalás

- Mindig van legalább egy v_{st}.
- Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor $v_{\mathrm{st}} = (x_1 \ \dots \ x_k)$ egyértelmű és $x_i > 0 \, \forall i$.
- Egy reducibilis Markov-lánc előbb-utóbb mindig egy rekurrens osztályban köt ki, ami egy mini irreducibilis Markov-láncnak is tekinthető.
- Irreducibilis, aperiodikus Markov-láncra $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ gyorsan.
- Irreducibilis, periodikus Markov-láncra v_n periodikusan közelíthető v_{st} megfelelő periodicitási osztályra vett feltételes eloszlásával.
- Irreducibilis Markov-lánc hosszú távon i-ben az idő x_i részét tölti az i állapotban, és az i-be való visszatérések között eltelt átlagos lépésszám $\frac{1}{x_i}$.
- Ergodtétel: egy függvény hosszú távú időátlaga $\mathbb{E}_{\mathrm{st}}(f)$, f-nek a stacionárius eloszlás szerinti várható értéke.

Végtelen állapottér

Végtelen állapottér esetén nagyon sokféle viselkedés lehetséges.

- Van olyan, hogy v_{st} egyértelmű és $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ tetszőleges v_0-ra; lényegében az összes, véges állapotterű Markov-láncra vonatkozó állítás érvényes.

Végtelen állapottér

Végtelen állapottér esetén nagyon sokféle viselkedés lehetséges.

- Van olyan, hogy v_{st} egyértelmű és $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ tetszőleges v_0-ra; lényegében az összes, véges állapotterű Markov-láncra vonatkozó állítás érvényes.
- Előfordulhat, hogy nem létezik v_{st}.

Végtelen állapottér

Végtelen állapottér esetén nagyon sokféle viselkedés lehetséges.

- Van olyan, hogy v_{st} egyértelmű és $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ tetszőleges v_0-ra; lényegében az összes, véges állapotterű Markov-láncra vonatkozó állítás érvényes.
- Előfordulhat, hogy nem létezik v_{st}.
- Előfordulhat, hogy végtelen sok v_{st} van, de v_n egyikhez sem konvergál.

Végtelen állapottér

Végtelen állapottér esetén nagyon sokféle viselkedés lehetséges.

- Van olyan, hogy v_{st} egyértelmű és $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ tetszőleges v_0-ra; lényegében az összes, véges állapotterű Markov-láncra vonatkozó állítás érvényes.
- Előfordulhat, hogy nem létezik v_{st}.
- Előfordulhat, hogy végtelen sok v_{st} van, de v_n egyikhez sem konvergál.
- Rekurrens és tranziens állapotokon kívül lehetnek *null-rekurrens* állapotok: olyan állapotok, ahová a Markov-lánc végtelen sokszor visszatér, de olyan ritkán, hogy a stacionárius valószínűségük 0.

Végtelen állapottér

Végtelen állapottér esetén nagyon sokféle viselkedés lehetséges.

- Van olyan, hogy v_{st} egyértelmű és $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ tetszőleges v_0-ra; lényegében az összes, véges állapotterű Markov-láncra vonatkozó állítás érvényes.
- Előfordulhat, hogy nem létezik v_{st}.
- Előfordulhat, hogy végtelen sok v_{st} van, de v_n egyikhez sem konvergál.
- Rekurrens és tranziens állapotokon kívül lehetnek *null-rekurrens* állapotok: olyan állapotok, ahová a Markov-lánc végtelen sokszor visszatér, de olyan ritkán, hogy a stacionárius valószínűségük 0.

Általában az átmenet-mátrix spektrális tulajdonságai segítenek a vizsgálatban.

Végtelen állapottér

Végtelen állapottér esetén nagyon sokféle viselkedés lehetséges.

- Van olyan, hogy v_{st} egyértelmű és $v_n \to v_{\mathrm{st}}$ tetszőleges v_0-ra; lényegében az összes, véges állapotterű Markov-láncra vonatkozó állítás érvényes.
- Előfordulhat, hogy nem létezik v_{st}.
- Előfordulhat, hogy végtelen sok v_{st} van, de v_n egyikhez sem konvergál.
- Rekurrens és tranziens állapotokon kívül lehetnek *null-rekurrens* állapotok: olyan állapotok, ahová a Markov-lánc végtelen sokszor visszatér, de olyan ritkán, hogy a stacionárius valószínűségük 0.

Általában az átmenet-mátrix spektrális tulajdonságai segítenek a vizsgálatban.

Néhány végtelen állapotterű Markov-láncot megnézünk majd – folytonos idejű Markov-láncokra.

5. feladat

A Sóder kft. kétféle munkát vállal: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,4 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 2,7 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 60% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 50% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha mindkét fajta megrendelés érkezik, akkor egy A típusút fogadnak el.

(a) Modellezzük a Sóder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek?

(b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Ez alapján adjuk meg, mennyi a Sóder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon.

(c) Átlagosan mennyi idő telik el két tétlen hónap között?

(d) A cégvezetés azon gondolkodik, hogy érdemes-e preferálni inkább a B típusú munkát olyankor, amikor mindkettőre érkezik megrendelés. Segítsünk nekik a döntésben!

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

5. feladat

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

Egy lehetséges realizáció:

$$A, B, B, 0, B, B, A, 0, A, A, B, B, B, B, A, \ldots$$

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

Egy lehetséges realizáció:

$$A,\ B,\ B,\ 0,\ B,\ B,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B,\ B,\ B,\ B,\ A, \ldots$$

Vajon ez egy Markov-lánc-e?

Megoldás.

(a) Nézzük meg, milyen tevékenységet végezhetnek egy adott hónapban. Lehet, hogy egy A típusú munkát csinálnak, vagy egy B típusú munkán dolgoznak, de lehetnek tétlenek is, ezt jelöljük 0-val.

Egy lehetséges realizáció:

$$A,\ B,\ B,\ 0,\ B,\ B,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B,\ B,\ B,\ B,\ A, \ldots$$

Vajon ez egy Markov-lánc-e?

Nem az. A gond az, hogy ha most egy B típusú munkán dolgoznak, akkor a jövő szempontjából számít, hogy az első vagy a második felét csinálják éppen: az első fele után mindenképpen a második fele jön, de a második fele után következhet egy A típusú munka, vagy egy B típusú munka, vagy egy tétlen hónap is.

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

A, B1, B2, 0, B1, B2, A, 0, A, A, B1, B2, B1, B2, A,. . .

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A, B1, B2, 0, B1, B2, A, 0, A, A, B1, B2, B1, B2, A, \ldots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A, B1, B2, 0\}$ állapottéren.

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A,\ B1,\ B2,\ 0,\ B1,\ B2,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B1,\ B2,\ B1,\ B2,\ A, \ldots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A, B1, B2, 0\}$ állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A,\ B1,\ B2,\ 0,\ B1,\ B2,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B1,\ B2,\ B1,\ B2,\ A, \ldots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A,\ B1,\ B2,\ 0\}$ állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

- Ha kapnak A típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.5.

5. feladat

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$\text{A, B1, B2, 0, B1, B2, A, 0, A, A, B1, B2, B1, B2, A,} \ldots$$

Ez már Markov-lánc az $\{$A, B1, B2, 0$\}$ állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

- Ha kapnak A típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.5.
- B típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak B típusú ajánlatot *és* nem kapnak A típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.6 \cdot (1 - 0.5) = 0.3$.

(a) Egy lehetséges megoldás a B típusú munkát szétszedni két állapotra. Ekkor az előbbi realizáció így néz ki:

$$A,\ B1,\ B2,\ 0,\ B1,\ B2,\ A,\ 0,\ A,\ A,\ B1,\ B2,\ B1,\ B2,\ A, \ldots$$

Ez már Markov-lánc az $\{A, B1, B2, 0\}$ állapottéren.

Számítsuk ki az átmenet-valószínűségeket az A állapotból. A munkát befejezik egy hónap alatt, tehát a következő hónapban fogadnak ajánlatokat.

- Ha kapnak A típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.5.
- B típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak B típusú ajánlatot *és* nem kapnak A típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.6 \cdot (1 - 0.5) = 0.3$.
- Tétlenek akkor lesznek, ha sem A, sem B típusú ajánlatot nem kapnak. Ennek a valószínűsége $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$.

(a) Az átmenet-valószínűség mátrix

	A	$B1$	$B2$	0
A	0.5	0.3	0	0.2
$B1$	0	0	1	0
$B2$	0.5	0.3	0	0.2
0	0.5	0.3	0	0.2

(a) Az átmenet-valószínűség mátrix

	A	$B1$	$B2$	0
A	0.5	0.3	0	0.2
$B1$	0	0	1	0
$B2$	0.5	0.3	0	0.2
0	0.5	0.3	0	0.2

A Markov-lánc bárhonnan bárhová eljuthat, azaz irreducibilis.

(a) Az átmenet-valószínűség mátrix

	A	$B1$	$B2$	0
A	0.5	0.3	0	0.2
$B1$	0	0	1	0
$B2$	0.5	0.3	0	0.2
0	0.5	0.3	0	0.2

A Markov-lánc bárhonnan bárhová eljuthat, azaz irreducibilis.

Gyors ökölszabály a periodicitás eldöntésére: ha a P mátrixnak van legalább egy szigorúan pozitív eleme az átlóban, akkor a Markov-lánc mindenképpen aperiodikus.

Fordítva nem igaz.

(b) A $v_{\mathrm{st}} = (\, x_1\; x_2\; x_3\; x_4 \,)$ stacionárius eloszlás kiszámítható a következőkből:

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{st}} \cdot P &= v_{\mathrm{st}}\,, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1,
\end{aligned}
$$

ahonnan

$$
\begin{aligned}
0.5x_1 + 0.5x_3 + 0.5x_4 &= x_1\,, \\
0.3x_1 + 0.3x_3 + 0.3x_4 &= x_2\,, \\
x_2 &= x_3\,, \\
0.2x_1 + 0.2x_3 + 0.2x_4 &= x_4\,, \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1.
\end{aligned}
$$

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

ennek megfelelően,

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}.$$

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

ennek megfelelően,

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{5}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{2}{13} \right).$$

A hosszú távú átlagos havi bevételüket az ergodtétel alapján számoljuk. Figyeljünk arra, hogy az ergodtételhez az egyes állapotokhoz kell értéket rendelnünk. Az A állapotra ez 1.4 (millió forint), a 0 állapotra 0, és a B1 és B2 állapot között szét kell osztanunk 2.7-et.

(b) Az első 4 egyenletből x_1, x_2, x_3, x_4 egymáshoz képesti aránya

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 5 : 3 : 3 : 2,$$

ennek megfelelően,

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{5}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{3}{13} \; \frac{2}{13} \right).$$

A hosszú távú átlagos havi bevételüket az ergodtétel alapján számoljuk. Figyeljünk arra, hogy az ergodtételhez az egyes állapotokhoz kell értéket rendelnünk. Az A állapotra ez 1.4 (millió forint), a 0 állapotra 0, és a B1 és B2 állapot között szét kell osztanunk 2.7-et.
Ha egyenletesen osztjuk ketté, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 1.35 + \frac{3}{13} \cdot 1.35 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

(b) Ha máshogy osztjuk ketté, pl. $2.7 + 0$ arányban, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 2.7 + \frac{3}{13} \cdot 0 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

(b) Ha máshogy osztjuk ketté, pl. $2.7 + 0$ arányban, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 2.7 + \frac{3}{13} \cdot 0 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

Sőt, $x_2 = x_3$ miatt ugyanannyi marad, akárhogyan is osztjuk ketté.

(b) Ha máshogy osztjuk ketté, pl. $2.7 + 0$ arányban, akkor a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{5}{13} \cdot 1.4 + \frac{3}{13} \cdot 2.7 + \frac{3}{13} \cdot 0 + \frac{2}{13} \cdot 0 \approx 1.16.$$

Sőt, $x_2 = x_3$ miatt ugyanannyi marad, akárhogyan is osztjuk ketté.

(c) Mivel egy tétlen hónap stacionárius valószínűsége $x_4 = \frac{2}{13}$, ezért két tétlen hónap között eltelt idő átlagosan

$$\frac{1}{2/13} = 6.5$$

hónap.

(d) Ha a B típusú munkát preferálják az A helyett, akkor az átmenet-valószínűségek mások lesznek.

- A típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak A típusú ajánlatot *és* nem kapnak B típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.5 \cdot (1 - 0.6) = 0.2$.
- Ha kapnak B típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.6.

(d) Ha a B típusú munkát preferálják az A helyett, akkor az átmenet-valószínűségek mások lesznek.

- A típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak A típusú ajánlatot *és* nem kapnak B típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.5 \cdot (1 - 0.6) = 0.2$.
- Ha kapnak B típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.6.
- Tétlenek akkor lesznek, ha sem A, sem B típusú ajánlatot nem kapnak. Ennek a valószínűsége $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$.

5. feladat

(d) Ha a B típusú munkát preferálják az A helyett, akkor az átmenet-valószínűségek mások lesznek.

- A típusú munkát akkor kezdenek el, ha kapnak A típusú ajánlatot *és* nem kapnak B típusú ajánlatot. Ennek a valószínűsége $0.5 \cdot (1 - 0.6) = 0.2$.
- Ha kapnak B típusú ajánlatot, azt fogadják el. Ennek a valószínűsége 0.6.
- Tétlenek akkor lesznek, ha sem A, sem B típusú ajánlatot nem kapnak. Ennek a valószínűsége $(1 - 0.5)(1 - 0.6) = 0.2$.

Ennek megfelelően

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

5. feladat

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

és

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{2}{16} \; \frac{6}{16} \; \frac{6}{16} \; \frac{2}{16} \right),$$

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

és

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix},$$

és az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{2}{16} \cdot 1.4 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{2}{16} \cdot 0 \approx 1.19.$$

(d) A stacionárius eloszlás is más:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 2 : 6 : 6 : 2,$$

és

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{16} & \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix},$$

és az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos havi bevételük

$$\frac{2}{16} \cdot 1.4 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{6}{16} \cdot 1.35 + \frac{2}{16} \cdot 0 \approx 1.19.$$

Ez egy picit magasabb, mint amikor az A típusú munkát preferálják, annak ellenére, hogy egy A típusú munkából az egy hónapra vetített bevétel magasabb. Ennek oka, hogy egy B típusú munka 2 hónapra garantál munkát, és így a tétlen hónapok aránya hosszú távon jelentősen alacsonyabb lesz.

9. feladat

A Faláb FC az egyetemi focibajnokságban játszik. A bajnokságnak 3 osztálya van: A, B és C. A C osztályból $2/3$ valószínűséggel feljutnak a B osztályba a következő szezonra, egyébként maradnak a C osztályban (az előzményektől függetlenül). A B osztályból $1/2$ valószínűséggel feljutnak az A osztályba, $1/3$ valószínűséggel maradnak a B osztályban és $1/6$ valószínűséggel visszaesnek a C osztályba. Az A osztályban $1/10$ valószínűséggel megnyerik a bajnokságot, $2/5$ valószínűséggel nem nyernek, de maradnak az A osztályban, $1/2$ valószínűséggel pedig kiesnek a B osztályba.

9. feladat

(a) Modellezzük a Faláb FC szezononkénti szereplését Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?

(b) Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 szezonnal később a B osztályban vannak?

(c) Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 szezonnal később a B osztályban vannak?

(d) Hosszú távon az idő mekkora részét töltik a B osztályban?

(f) Mekkora az esélye, hogy 10 szezon múlva a szezon végén kiesnek?

(e) Átlagosan hány szezon telik el két bajnoki cím között?

Megoldás.

(a) Az állapotok C, B és A.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A Markov-lánc irreducibilis, mert bárhonnan bárhová eljuthat, és van a főátlóban pozitív elem, úgyhogy aperiodikus is.

9. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok C, B és A.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A Markov-lánc irreducibilis, mert bárhonnan bárhová eljuthat, és van a főátlóban pozitív elem, úgyhogy aperiodikus is.

(b)

$$\begin{aligned} v_0 &= (\,1\ 0\ 0\,), \\ v_1 = v_0 P &= (\,1/3\ \ 2/3\ \ 0\,)\,, \\ v_2 = v_1 P &= (\,2/9\ \ 4/9\ \ 3/9\,)\,. \end{aligned}$$

Feltéve, hogy most a C osztályban vannak, annak a valószínűsége, hogy 2 szezon múlva a B osztályban lesznek, 4/9.

(c) A $v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ stacionárius vektort

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 &= x_1 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

alapján számítjuk ki. A harmadik egyenletből $x_2 = x_3$, az első egyenletből $x_2 = 4x_1$, tehát $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 4 : 4$ és

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

(c) A $v_{\mathrm{st}} = (\, x_1 \; x_2 \; x_3 \,)$ stacionárius vektort

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 &= x_1 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= x_2 \\ \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

alapján számítjuk ki. A harmadik egyenletből $x_2 = x_3$, az első egyenletből $x_2 = 4x_1$, tehát $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 4 : 4$ és

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{1}{9} \; \frac{4}{9} \; \frac{4}{9} \right).$$

A Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, tehát $v_n \approx v_{\mathrm{st}}$ nagy n esetén. 10 szezon nagy idő, tehát annak a valószínűsége, hogy a B osztályban játszanak, $x_2 = 4/9$.

9. feladat

(d) A hosszú távon B osztályban töltött idő aránya ugyancsak $x_2 = 4/9$.

(d) A hosszú távon B osztályban töltött idő aránya ugyancsak $x_2 = 4/9$.

(e) Jelölje K azt az eseményt, hogy kiesnek 10 szezon után, A, B és C pedig azt, hogy 10 év múlva az A, B illetve C osztályban vannak. A kiesés valószínűsége függ attól, melyik osztályban vannak. Azt, hogy milyen valószínűséggel lesznek az egyes osztályokban, a stacionárius eloszlásból kapjuk, azt pedig, hogy az egyes osztályokból milyen valószínűséggel esnek ki, a P mátrixból. Teljes valószínűség tétele alapján:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \mathbb{P}(K|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(K|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(K|A)\mathbb{P}(A) \\ &\approx 0 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \approx 0.296.\end{aligned}$$

9. feladat

(f) Az, hogy bajnoki címet nyernek-e vagy sem, nem látszik a Markov-lánc állapotaiból, mivel akár nyernek, akár nem, az A osztályban maradnak.

(f) Az, hogy bajnoki címet nyernek-e vagy sem, nem látszik a Markov-lánc állapotaiból, mivel akár nyernek, akár nem, az A osztályban maradnak.

Az A állapot stacionárius valószínűsége $x_3 = \frac{4}{9}$, tehát ennyi az A állapotok aránya is hosszú távon. Valahányszor az A osztályban vannak, $1/10$ valószínűséggel nyernek, tehát hosszú távon a szezonok $\frac{4}{9} \cdot 1/10 = 4/90$ részében nyernek bajnokságot, és két bajnoki cím között átlagosan $90/4 = 22,5$ szezon telik el.

2. feladat

Egy 8×8-as sakktáblán egy huszár lépked véletlenszerűen úgy, hogy minden egyes lépésben a lehetséges lépések közül egyenletesen választ. Jelölje X_n a pozícióját az n. lépés után.

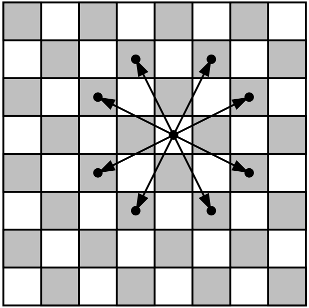
(a) Gondoljuk meg, hogy X_n Markov-lánc. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?

(b) Adjuk meg a stacionárius eloszlását.

(c) Tegyük fel, hogy most az A1 mezőn áll a huszár. Mekkora a valószínűsége, hogy 99 lépés után ismét az A1 mezőn áll? És 100 lépés után?

2. feladat

(a) Megoldás. A huszár lehetséges lépései:



(A tábla szélén kevesebb lehetőség van.)

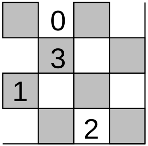
2. feladat

(a) Mivel minden lépésben véletlenszerűen választ csak az aktuális mezőtől függően, ez bizony egy Markov-lánc. 64 állapota van (a mezőknek megfelelően).

2. feladat

(a) Mivel minden lépésben véletlenszerűen választ csak az aktuális mezőtől függően, ez bizony egy Markov-lánc. 64 állapota van (a mezőknek megfelelően).

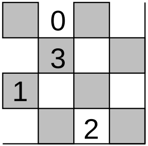
A Markov-lánc irreducibilis, mivel a huszár eljuthat bárhonnan bárhová; ezt például onnan lehet látni, hogy a következő 3 lépéses kombinációval el tud jutni egy szomszédos mezőre, aztán ezt ismételve bárhová a táblán.



2. feladat

(a) Mivel minden lépésben véletlenszerűen választ csak az aktuális mezőtől függően, ez bizony egy Markov-lánc. 64 állapota van (a mezőknek megfelelően).

A Markov-lánc irreducibilis, mivel a huszár eljuthat bárhonnan bárhová; ezt például onnan lehet látni, hogy a következő 3 lépéses kombinációval el tud jutni egy szomszédos mezőre, aztán ezt ismételve bárhová a táblán.



A Markov-lánc periodikus 2 periódussal, mivel a huszár mindig fehér mezőről feketére lép és viszont.

2. feladat

(a) A P átmenet-valószínűség mátrix 64×64-es; $P_{ij} = \frac{1}{d_i}$, ha d_i a lehetséges cél mezők száma az i-edik mezőről. A d_i értékek az egyes mezőkre:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

(b) Ez egy speciális szerkezetű Markov-lánc: tulajdonképpen egy 64 csúcsú irányítatlan gráfon zajló bolyongás úgy, hogy minden lépésben a szomszédok közül egyenletesen választja ki a következő állapotot.

(b) Ez egy speciális szerkezetű Markov-lánc: tulajdonképpen egy 64 csúcsú irányítatlan gráfon zajló bolyongás úgy, hogy minden lépésben a szomszédok közül egyenletesen választja ki a következő állapotot.

Lemma

Az ilyen típusú Markov-láncok stacionárius eloszlása

$$v_{st} = (x_1 \; \dots \; x_k),$$

ahol

$$x_i = \frac{d_i}{\sum_i d_i}.$$

(b) Ez egy speciális szerkezetű Markov-lánc: tulajdonképpen egy 64 csúcsú irányítatlan gráfon zajló bolyongás úgy, hogy minden lépésben a szomszédok közül egyenletesen választja ki a következő állapotot.

Lemma

Az ilyen típusú Markov-láncok stacionárius eloszlása

$$v_{st} = (x_1 \; \dots \; x_k),$$

ahol

$$x_i = \frac{d_i}{\sum_i d_i}.$$

Biz. Ellenőrizni kell a stacionárius eloszlás definícióját:

$$(v_{\mathrm{st}} \cdot P)_i = \sum_j x_j P_{ji} = \sum_{j : j \text{ és } i \text{ szomszédos}} \frac{d_j}{\sum_i d_i} \cdot \frac{1}{d_j} = \frac{d_i}{\sum_i d_i} = x_i.$$

(c) Ennek megfelelően

$$\mathbb{P}(\text{A1 100 lépés után}|\text{A1 kezdetben})$$

értékét úgy számítjuk ki, hogy először ellenőrizzük, lehet-e ismét A1-en 100 lépés után (erre a periodikusság miatt van szükség).

(c) Ennek megfelelően

$$\mathbb{P}(\text{A1 100 lépés után}|\text{A1 kezdetben})$$

értékét úgy számítjuk ki, hogy először ellenőrizzük, lehet-e ismét A1-en 100 lépés után (erre a periodikusság miatt van szükség). Lehetséges, mert 100 páros. Ezután a válasz közelítőleg az A1 mező stacionárius valószínűsége szorozva a periódussal (2), ami $\frac{4}{336}$.

(c) Ennek megfelelően

$$\mathbb{P}(\text{A1 100 lépés után}|\text{A1 kezdetben})$$

értékét úgy számítjuk ki, hogy először ellenőrizzük, lehet-e ismét A1-en 100 lépés után (erre a periodikusság miatt van szükség). Lehetséges, mert 100 páros. Ezután a válasz közelítőleg az A1 mező stacionárius valószínűsége szorozva a periódussal (2), ami $\frac{4}{336}$.

A

$$\mathbb{P}(\text{A1 99 lépés után}|\text{A1 kezdetben})$$

valószínűséghez először ismét csak ellenőrizzük, hogy lehet-e ismét A1-en 99 lépés után.

(c) Ennek megfelelően

$$\mathbb{P}(\text{A1 100 lépés után}|\text{A1 kezdetben})$$

értékét úgy számítjuk ki, hogy először ellenőrizzük, lehet-e ismét A1-en 100 lépés után (erre a periodikusság miatt van szükség). Lehetséges, mert 100 páros. Ezután a válasz közelítőleg az A1 mező stacionárius valószínűsége szorozva a periódussal (2), ami $\frac{4}{336}$.

A

$$\mathbb{P}(\text{A1 99 lépés után}|\text{A1 kezdetben})$$

valószínűséghez először ismét csak ellenőrizzük, hogy lehet-e ismét A1-en 99 lépés után. Ez viszont nem lehetséges, mivel 99 páratlan, és A1 fehér, tehát páratlan sok lépés után csak fekete mezőn állhat a huszár. Tehát

$$\mathbb{P}(\text{A1 99 lépés után}|\text{A1 kezdetben}) = 0.$$

Jónás gépjármű-felelősségbiztosítója 4 kategóriába osztja az ügyfeleket: 1, 2, 3, 4. Ha egy ügyfél egy éven át nem okoz balesetet, egy kategóriával feljebb kerül (illetve ha a 4-esben volt, akkor ott marad). Ha egy ügyfél súlyos balesetet okoz, akkor a következő évben az 1-es kategóriába kerül. Ha egy ügyfél egy adott évben könnyű balesetet okoz, de súlyos balesetet nem, akkor a következő évben egy kategóriával lejjebb kerül (ha az 1-esben volt, akkor ott marad).

Jónás egy év alatt $1/12$ eséllyel okoz súlyos balesetet, és $1/4$ annak az esélye, hogy okoz könnyű balesetet, de súlyosat nem.

8. feladat

(a) Modellezzük a folyamatot Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy Jónás két év múlva a 2-es kategóriába tartozik, ha most a 4-es kategóriában van?

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy 10 év múlva a 2-es kategóriában van?

(d) Hosszú távon az évfordulók mekkora része olyan típusú, hogy 3-as kategóriából 4-es kategóriába lép?

(e) Az egyes kategóriák esetén az éves díj rendre 120000, 72000, 54000, 36000 forint. Mennyi a Jónás által fizetett éves díj hosszú távon átlagosan?

Megoldás.

(a) Az állapotok 1, 2, 3, 4 a kategóriáknak megfelelően.

8. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok 1, 2, 3, 4 a kategóriáknak megfelelően.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/12 & 1/4 & 0 & 2/3 \\ 1/12 & 0 & 1/4 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

A Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus.

Megoldás.

(a) Az állapotok 1, 2, 3, 4 a kategóriáknak megfelelően.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/12 & 1/4 & 0 & 2/3 \\ 1/12 & 0 & 1/4 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

A Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus.

(b) Ha most a 4-es kategóriában van, akkor $v_0 = (\,0\ 0\ 0\ 1\,)$ és

$$v_1 = v_0 P = \left(\frac{1}{12}\ 0\ \frac{1}{4}\ \frac{2}{3} \right) \qquad v_2 = v_1 P = \left(\frac{5}{48}\ \frac{17}{144}\ \frac{1}{6}\ \frac{11}{18} \right),$$

tehát annak a valószínűsége, hogy 2 év múlva a 2-es kategóriában lesz, $\frac{17}{144} \approx 0.118$.

(c) 10 év hosszú idő, tehát $v_{10} \approx v_{\mathrm{st}}$. $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ kiszámítható

$$v_{\mathrm{st}} = v_{\mathrm{st}} P,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

alapján.

(c) 10 év hosszú idő, tehát $v_{10} \approx v_{\mathrm{st}}$. $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ kiszámítható

$$v_{\mathrm{st}} = v_{\mathrm{st}} P,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

alapján. Az eredmény

$$v_{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix},$$

tehát annak a valószínűsége, hogy 10 év múlva a 2-es kategóriában lesz, $\frac{1}{6}$.

(d) Hosszú távon annak a valószínűsége, hogy a 3-as kategóriában van egy adott évben, $x_3 = \frac{2}{9}$, és

$$\mathbb{P}(3 \to 4) = \mathbb{P}(3 \to 4|3)\mathbb{P}(3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{27}.$$

Ennyi a $3 \to 4$ átmenetek hosszú távú gyakorisága is az összes évhez képest.

(d) Hosszú távon annak a valószínűsége, hogy a 3-as kategóriában van egy adott évben, $x_3 = \frac{2}{9}$, és

$$\mathbb{P}(3 \to 4) = \mathbb{P}(3 \to 4|3)\mathbb{P}(3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{27}.$$

Ennyi a $3 \to 4$ átmenetek hosszú távú gyakorisága is az összes évhez képest.

(e) Az ergodtétel alapján Jónás hosszú távú díja átlagosan

$$120000 \cdot \frac{1}{6} + 72000 \cdot \frac{1}{6} + 54000 \cdot \frac{2}{9} + 36000 \cdot \frac{4}{9} = 60000$$

forint évente.