Folytonos idejű Markov-láncok

Sztochasztika

Horváth Illés

2022/11/18

1. Kiindulási pont: Markov-láncok
2. Infinitezimális generátor mátrix
3. „Óra és kocka” vs. „versengő órák” értelmezés
4. Hosszú távú viselkedés
5. Rövid távú viselkedés
6. Beágyazott Markov-lánc
7. Véges és végtelen sorok

Folytonos idejű Markov-láncok

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.) Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncok

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.) Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncokat szeretnénk definiálni, ahol a változás bármikor bekövetkezhet, de a rendszer egyébként hasonlóan viselkedik a diszkrét idejű Markov-láncokhoz.

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.) Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncokat szeretnénk definiálni, ahol a változás bármikor bekövetkezhet, de a rendszer egyébként hasonlóan viselkedik a diszkrét idejű Markov-láncokhoz.

A folytonos idejű Markov-láncok többféleképpen is bevezethetőek:

(1) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és randomizáljuk a várakozási időt az átmenetek között.

(2) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és a diszkrét időegységgel 0-hoz tartunk.

(3) Absztrakt félcsoportos definícióval.

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.) Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncokat szeretnénk definiálni, ahol a változás bármikor bekövetkezhet, de a rendszer egyébként hasonlóan viselkedik a diszkrét idejű Markov-láncokhoz.

A folytonos idejű Markov-láncok többféleképpen is bevezethetőek:

(1) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és randomizáljuk a várakozási időt az átmenetek között.

(2) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és a diszkrét időegységgel 0-hoz tartunk.

(3) Absztrakt félcsoportos definícióval.

Mi az (1)-est fogjuk csinálni, de végeredményben mindhárom ekvivalens és ugyanazt a folyamatot definiálja.

Kiindulási pont: Markov-láncok

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T; mi lehet T eloszlása?

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T; mi lehet T eloszlása?

A kulcs a Markov-tulajdonság, azaz hogy a jövő csak a jelenlegi állapottól függ, a múlttól nem. Ezt továbbra is szeretnénk megőrizni, viszont ebbe most az is beletartozik, hogy *mennyi ideje van a Markov-lánc a jelenlegi állapotban*.

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T; mi lehet T eloszlása?

A kulcs a Markov-tulajdonság, azaz hogy a jövő csak a jelenlegi állapottól függ, a múlttól nem. Ezt továbbra is szeretnénk megőrizni, viszont ebbe most az is beletartozik, hogy *mennyi ideje van a Markov-lánc a jelenlegi állapotban*. Ez az ún. memóriamentes tulajdonság, amivel már találkoztunk a Poisson-folyamatoknál.

Kiindulási pont: Markov-láncok

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T; mi lehet T eloszlása?

A kulcs a Markov-tulajdonság, azaz hogy a jövő csak a jelenlegi állapottól függ, a múlttól nem. Ezt továbbra is szeretnénk megőrizni, viszont ebbe most az is beletartozik, hogy *mennyi ideje van a Markov-lánc a jelenlegi állapotban*. Ez az ún. memóriamentes tulajdonság, amivel már találkoztunk a Poisson-folyamatoknál.

Az egyetlen folytonos memóriamentes eloszlás az exponenciális eloszlás, tehát T exponenciális eloszlású kell legyen. A paraméter függhet az aktuális i állapottól; λ_i-vel fogjuk jelölni.

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Ha a Markov-lánc az i állapotban van, generálunk egy $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda_i)$ valószínűségi változót.

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Ha a Markov-lánc az i állapotban van, generálunk egy $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda_i)$ valószínűségi változót.

T idő eltelte után a következő állapotot véletlenszerűen választjuk ki a P mátrix i-edik sora alapján, függetlenül T-től (és általában a múlttól is).

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Ha a Markov-lánc az i állapotban van, generálunk egy $T \sim \mathrm{EXP}(\lambda_i)$ valószínűségi változót.

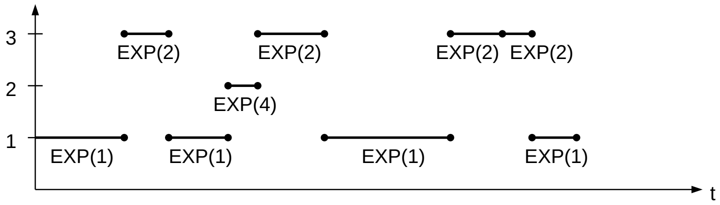
T idő eltelte után a következő állapotot véletlenszerűen választjuk ki a P mátrix i-edik sora alapján, függetlenül T-től (és általában a múlttól is).

A Markov-lánc átlép az új állapotba, ezután a fenti ciklust újrakezdjük egy új T generálásával stb.

Példa. Legyen egy diszkrét idejű Markov-láncunk 3 állapoton $v(0) = (\,1\;0\;0\,)$ kezdővektorral és

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

átmenet-valószínűség mátrixszal, és legyenek $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$. Ekkor a diszkrét idejű Markov-lánc $1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \ldots$ realizációja a megfelelő folytonos idejű Markov-láncra a következő lesz:



Infinitezimális generátor

Az előző konstrukciót tekintjük a folytonos idejű Markov-lánc (CTMC, continuous time Markov chain) definíciójának. Teljesíti a Markov-tulajdonságot.

Infinitezimális generátor

Az előző konstrukciót tekintjük a folytonos idejű Markov-lánc (CTMC, continuous time Markov chain) definíciójának. Teljesíti a Markov-tulajdonságot.

Legyen $v(t)$ az eloszlásvektor t időpontban, vagyis

$$v_i(t) = \mathbb{P}(\text{a Markov-lánc az } i \text{ állapotban van } t\text{-kor}).$$

Ezúttal $t \in [0, \infty)$, nemcsak egész értékeket vehet fel az idő.

Infinitezimális generátor

Az előző konstrukciót tekintjük a folytonos idejű Markov-lánc (CTMC, continuous time Markov chain) definíciójának. Teljesíti a Markov-tulajdonságot.

Legyen $v(t)$ az eloszlásvektor t időpontban, vagyis

$$v_i(t) = \mathbb{P}(\text{a Markov-lánc az } i \text{ állapotban van } t\text{-kor}).$$

Ezúttal $t \in [0, \infty)$, nemcsak egész értékeket vehet fel az idő.

Tétel.

$$v(t) = v(0)e^{Qt},$$

ahol a Q mátrixot $(P - I)$-ből kapjuk úgy, hogy az i-edik sort megszorozzuk λ_i-vel minden i-re, és I az identitásmátrix.

Q a folyamat *infinitezimális generátora* vagy röviden *generátora*.

Biz. (vázlat) Legyen

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor} | \text{az } i \text{ állapotból indult}),$$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba.

Biz. (vázlat) Legyen

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor}|\text{az } i \text{ állapotból indult}),$$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba. $P(t)$ teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenleteket (vagy félcsoport egyenleteket):

$$P(t+s) = P(t)P(s) \qquad \forall s, t \geq 0$$

a teljes valószínűség tétele miatt.

Biz. (vázlat) Legyen

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor}|\text{az } i \text{ állapotból indult}),$$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba. $P(t)$ teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenleteket (vagy félcsoport egyenleteket):

$$P(t+s) = P(t)P(s) \qquad \forall s, t \geq 0$$

a teljes valószínűség tétele miatt. Ennek megoldása

$$P(t) = e^{Qt} \qquad \text{ahol} \qquad Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t)\Big|_{t=0}.$$

Infinitezimális generátor

Biz. (vázlat) Legyen

$$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor}|\text{az } i \text{ állapotból indult}),$$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba. $P(t)$ teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenleteket (vagy félcsoport egyenleteket):

$$P(t+s) = P(t)P(s) \qquad \forall s, t \geq 0$$

a teljes valószínűség tétele miatt. Ennek megoldása

$$P(t) = e^{Qt} \qquad \text{ahol} \qquad Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t)\Big|_{t=0}.$$

Végül $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t)\Big|_{t=0}$ kiszámítása pont a tételben definiált Q mátrixot adja.

Példa

Az előző példában

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix},$$

és $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2,$ ahonnan

$$P - I = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & -1 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & -3/4 \end{bmatrix}$$

és

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

A fenti tulajdonságok elegendőek is, tehát bármely Q mátrix, ami teljesíti a fenti tulajdonságokat, alkalmas generátornak.

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

A fenti tulajdonságok elegendőek is, tehát bármely Q mátrix, ami teljesíti a fenti tulajdonságokat, alkalmas generátornak.

Egy A mátrixra e^A kiszámítható vagy hatványsor alakban:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

vagy Jordan-normálalakból.

Q tulajdonságai

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

A fenti tulajdonságok elegendőek is, tehát bármely Q mátrix, ami teljesíti a fenti tulajdonságokat, alkalmas generátornak.

Egy A mátrixra e^A kiszámítható vagy hatványsor alakban:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

vagy Jordan-normálalakból.

Leszenek majd egyszerűen kiszámítható közelítések is e^{Qt}-re.

Óra és kocka

A folytonos idejű Markov-lánc konstrukciójában először az egy állapotban eltöltött véletlen időt generáljuk le, majd ha az eltelt, akkor választjuk ki a következő állapotot véletlenszerűen.

Óra és kocka

A folytonos idejű Markov-lánc konstrukciójában először az egy állapotban eltöltött véletlen időt generáljuk le, majd ha az eltelt, akkor választjuk ki a következő állapotot véletlenszerűen.

Erre „óra és kocka” interpretációként hivatkozunk, mert gondolhatunk rá úgy, hogy először felhúzunk egy vekkert, ami véletlen $\mathrm{EXP}(\lambda_i)$ idő után csörög, majd amikor csörög, gurítunk egy dobókockával a következő állapot kisorsolásához.

Óra és kocka

A folytonos idejű Markov-lánc konstrukciójában először az egy állapotban eltöltött véletlen időt generáljuk le, majd ha az eltelt, akkor választjuk ki a következő állapotot véletlenszerűen.

Erre „óra és kocka” interpretációként hivatkozunk, mert gondolhatunk rá úgy, hogy először felhúzunk egy vekkert, ami véletlen $\mathrm{EXP}(\lambda_i)$ idő után csörög, majd amikor csörög, gurítunk egy dobókockával a következő állapot kisorsolásához.

Megnézünk egy másik, de ezzel ekvivalens értelmezést.

Lemma

Legyenek $X_1, \dots, X_k$ *függetlenek,* $X_i \sim EXP(\mu_i)$ *és*

$$Y = \min(X_1, \dots, X_k).$$

Ekkor $Y \sim EXP(\mu_1 + \dots + \mu_k)$ *és*

$$\mathbb{P}(Y = X_i) = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \dots + \mu_k}.$$

Lemma

Legyenek $X_1, \dots, X_k$ *függetlenek,* $X_i \sim \mathrm{EXP}(\mu_i)$ *és*

$$Y = \min(X_1, \dots, X_k).$$

Ekkor $Y \sim \mathrm{EXP}(\mu_1 + \dots + \mu_k)$ *és*

$$\mathbb{P}(Y = X_i) = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \dots + \mu_k}.$$

Nem biz. (De $k = 2$-re egyszerű számolás és onnan teljes indukcióval adódik általános k-ra.)

A korábbi példára:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix},$$

és legyen mondjuk a Markov-lánc épp a 2-es állapotban.

Versengő órák

A korábbi példára:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix},$$

és legyen mondjuk a Markov-lánc épp a 2-es állapotban.

A 2-es állapotból a Markov-lánc átléphet az 1-es vagy 3-as állapotba. Ezúttal 2 vekkert húzunk fel, egyet-egyet a lehetséges átmenetekhez: $T_{2\to1} \sim \mathrm{EXP}(4/5)$ és $T_{2\to3} \sim \mathrm{EXP}(16/5)$, és legyenek függetlenek.

Versengő órák

A korábbi példára:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix},$$

és legyen mondjuk a Markov-lánc épp a 2-es állapotban.

A 2-es állapotból a Markov-lánc átléphet az 1-es vagy 3-as állapotba. Ezúttal 2 vekkert húzunk fel, egyet-egyet a lehetséges átmenetekhez: $T_{2\to1} \sim \mathrm{EXP}(4/5)$ és $T_{2\to3} \sim \mathrm{EXP}(16/5)$, és legyenek függetlenek.

Az órák *versenyeznek*: amelyik először csörög, az az átmenet történik meg (és a másik nem).

Mit mond erről a konstrukcióról a lemma?

Mit mond erről a konstrukcióról a lemma?

A következő átmenet ideje

$$T = \min(T_{2\to 1}, T_{2\to 3}).$$

A lemma szerint $T \sim \mathrm{EXP}(16/5 + 4/5)$, aminek a paramétere éppen $\lambda_2 = 4$.

Mit mond erről a konstrukcióról a lemma?

A következő átmenet ideje

$$T = \min(T_{2\to 1}, T_{2\to 3}).$$

A lemma szerint $T \sim \mathrm{EXP}(16/5 + 4/5)$, aminek a paramétere éppen $\lambda_2 = 4$.

Továbbá

$$\mathbb{P}(T = T_{2\to 1}) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$
$$\mathbb{P}(T = T_{2\to 3}) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5,$$

ami összhangban van P második sorával:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Versengő órák

A fenti *„versengő órák"* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

A fenti *„versengő órák”* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban.

Versengő órák

A fenti *„versengő órák”* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban. Ha éppen 2-en állnak sorba, akkor a következő átmenet után vagy 1, vagy 3 vásárló lesz a sorban, attól függően, hogy

- a sor elején álló vásárlót szolgálják ki hamarabb, vagy
- egy új vásárló áll be a sor végére hamarabb.

Versengő órák

A fenti *„versengő órák”* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban. Ha éppen 2-en állnak sorba, akkor a következő átmenet után vagy 1, vagy 3 vásárló lesz a sorban, attól függően, hogy

- a sor elején álló vásárlót szolgálják ki hamarabb, vagy
- egy új vásárló áll be a sor végére hamarabb.

A sorhossz $+1$-gyel vagy -1-gyel változik, attól függően, melyik következik be előbb, így itt természetes módon megjelenik a kétfajta változás, amik úgymond egymással versenyeznek.

Versengő órák

A fenti *„versengő órák”* interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncra is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban. Ha éppen 2-en állnak sorba, akkor a következő átmenet után vagy 1, vagy 3 vásárló lesz a sorban, attól függően, hogy

- a sor elején álló vásárlót szolgálják ki hamarabb, vagy
- egy új vásárló áll be a sor végére hamarabb.

A sorhossz $+1$-gyel vagy -1-gyel változik, attól függően, melyik következik be előbb, így itt természetes módon megjelenik a kétfajta változás, amik úgymond egymással versenyeznek.

Ez az interpretáció sok valós helyzetben természetes: a rendszer változásai sokféle versengő hatás eredménye.

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Ezek hasonlóak a Poisson-folyamat rátájához: ha például a Markov-lánc a 2-es állapotban van, akkor a következő $2 \to 1$ átmenetig szükséges idő eloszlása EXP$(4/5)$, pont mint egy Poisson-folyamatnál, és a következő $2 \to 3$ átmenetig szükséges idő eloszlása EXP$(16/5)$.

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Ezek hasonlóak a Poisson-folyamat rátájához: ha például a Markov-lánc a 2-es állapotban van, akkor a következő $2 \to 1$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\text{EXP}(4/5)$, pont mint egy Poisson-folyamatnál, és a következő $2 \to 3$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\text{EXP}(16/5)$.

A főátlóbeli negatív elemek a *kimenő ráták* az egyes állapotokból ($-$ előjellel).

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q-t hívják rátamátrixnak is.)

Ezek hasonlóak a Poisson-folyamat rátájához: ha például a Markov-lánc a 2-es állapotban van, akkor a következő $2 \to 1$ átmenetig szükséges idő eloszlása EXP$(4/5)$, pont mint egy Poisson-folyamatnál, és a következő $2 \to 3$ átmenetig szükséges idő eloszlása EXP$(16/5)$.

A főátlóbeli negatív elemek a *kimenő ráták* az egyes állapotokból ($-$ előjellel).

Egy átmenet után a Markov-lánc egy új állapotban van, az új állapotnak megfelelő lehetséges célállapotokkal és átmenet rátákkal.

Poisson-folyamat mint Markov-lánc

Egy PPP(λ) Poisson-folyamat is tekinthető folytonos idejű Markov-láncnak. Az $N(t)$ számláló folyamat lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$

Poisson-folyamat mint Markov-lánc

Egy PPP(λ) Poisson-folyamat is tekinthető folytonos idejű Markov-láncnak. Az $N(t)$ számláló folyamat lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$

Az $0 \to 1$, $1 \to 2$ stb. átmenetek között eltelt idő eloszlása mindig EXP(λ), tehát $N(t)$ egy Markov-lánc a $0, 1, 2, \ldots$ állapottéren, a generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Poisson-folyamat mint Markov-lánc

Egy PPP(λ) Poisson-folyamat is tekinthető folytonos idejű Markov-láncnak. Az $N(t)$ számláló folyamat lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$

Az $0 \to 1$, $1 \to 2$ stb. átmenetek között eltelt idő eloszlása mindig EXP(λ), tehát $N(t)$ egy Markov-lánc a $0, 1, 2, \ldots$ állapottéren, a generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

(Q egy "végtelen mátrix", de emiatt most ne aggódjunk.)

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal!

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Ahhoz, hogy a folyamat (folytonos idejű) Markov-lánc legyen, arra van szükségünk, hogy az egyes állapotokban eltöltött idők exponenciális eloszlásúak és függetlenek legyenek.

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Ahhoz, hogy a folyamat (folytonos idejű) Markov-lánc legyen, arra van szükségünk, hogy az egyes állapotokban eltöltött idők exponenciális eloszlásúak és függetlenek legyenek.

Az érkezési folyamatra nézve ez pont azt jelenti, hogy az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek 0.2 ügyfél per perc rátával. Jogos-e ezt feltenni?

Példa

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Ahhoz, hogy a folyamat (folytonos idejű) Markov-lánc legyen, arra van szükségünk, hogy az egyes állapotokban eltöltött idők exponenciális eloszlásúak és függetlenek legyenek.

Az érkezési folyamatra nézve ez pont azt jelenti, hogy az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek 0.2 ügyfél per perc rátával. Jogos-e ezt feltenni?

Jogos, hiszen az érkezés sok, független forrásból történik, és mindnek a kontribúciója kicsi.

Példa

A kiszolgálásról annyit tudunk, hogy az átlagos kiszolgálási idő 2 perc. Tegyük fel, hogy a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású! Ekkor, hogy a várható érték valóban 2 perc legyen, az exponenciális eloszlás paramétere 0.5 kell legyen.

Példa

A kiszolgálásról annyit tudunk, hogy az átlagos kiszolgálási idő 2 perc. Tegyük fel, hogy a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású! Ekkor, hogy a várható érték valóban 2 perc legyen, az exponenciális eloszlás paramétere 0.5 kell legyen.

És ez a feltevés jogos-e? Nem tudjuk. Azonban a Markov-tulajdonság csak exponenciális várakozási idő esetén teljesül, tehát ha nincs több információ megadva, akkor akár fel is tehetjük.

Példa

A kiszolgálásról annyit tudunk, hogy az átlagos kiszolgálási idő 2 perc. Tegyük fel, hogy a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású! Ekkor, hogy a várható érték valóban 2 perc legyen, az exponenciális eloszlás paramétere 0.5 kell legyen.

És ez a feltevés jogos-e? Nem tudjuk. Azonban a Markov-tulajdonság csak exponenciális várakozási idő esetén teljesül, tehát ha nincs több információ megadva, akkor akár fel is tehetjük.

Ha a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású, akkor a Markov-tulajdonság nem teljesül, a folyamat nem folytonos idejű Markov-lánc, és az elemzéséhez más, bonyolultabb eszközök kellenek.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezés Poisson-pontfolyamat szerint történik, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezés Poisson-pontfolyamat szerint történik, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezés Poisson-pontfolyamat szerint történik, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezés Poisson-pontfolyamat szerint történik, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

$0 \to 2$ és $2 \to 0$ átmenetek nem lehetségesek, folytonos időben nem érkezik 2 ügyfél pontosan egyszerre.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezés Poisson-pontfolyamat szerint történik, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

$0 \to 2$ és $2 \to 0$ átmenetek nem lehetségesek, folytonos időben nem érkezik 2 ügyfél pontosan egyszerre.

Az átlós elemeket írjuk be utoljára úgy, hogy a sorösszegek 0-k legyenek.

Példa

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezés Poisson-pontfolyamat szerint történik, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \to 1$ és $1 \to 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \to 0$ és $2 \to 1$, ezek rátája 0.5.

$0 \to 2$ és $2 \to 0$ átmenetek nem lehetségesek, folytonos időben nem érkezik 2 ügyfél pontosan egyszerre.

Az átlós elemeket írjuk be utoljára úgy, hogy a sorösszegek 0-k legyenek. Összességében a generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & -0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Periodicitás folytonos idejű Markov-láncokra nincs; ha úgy tetszik, minden folytonos idejű Markov-lánc automatikusan aperiodikus.

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Periodicitás folytonos idejű Markov-láncokra nincs; ha úgy tetszik, minden folytonos idejű Markov-lánc automatikusan aperiodikus.

A stacionárius eloszlás definíciója picit eltér a diszkrét idejű esettől: $v_{\mathrm{st}} = (x_1 \ \dots \ x_k)$ stacionárius, ha

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_k &= 1, \\ v_{\mathrm{st}} Q &= 0, \end{aligned}$$

ahol 0 a konstans 0 vektort jelöli.

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Periodicitás folytonos idejű Markov-láncokra nincs; ha úgy tetszik, minden folytonos idejű Markov-lánc automatikusan aperiodikus.

A stacionárius eloszlás definíciója picit eltér a diszkrét idejű esettől: $v_{\mathrm{st}} = (x_1 \ \dots \ x_k)$ stacionárius, ha

$$\begin{aligned} x_1 + \dots + x_k &= 1, \\ v_{\mathrm{st}} Q &= 0, \end{aligned}$$

ahol 0 a konstans 0 vektort jelöli.

$$v(0) = v_{\mathrm{st}} \Longrightarrow v(t) = v_{\mathrm{st}} \quad \forall t > 0.$$

Tétel. (Fő tétel)

a) *Bármely (véges állapotterű) folytonos idejű Markov-láncra létezik legalább egy v_{st}.*

b) *Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor v_{st} egyértelmű, az elemei szigorúan pozitívak, és*

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = v_{st}$$

tetszőleges $v(0)$ kezdeti vektor esetén.

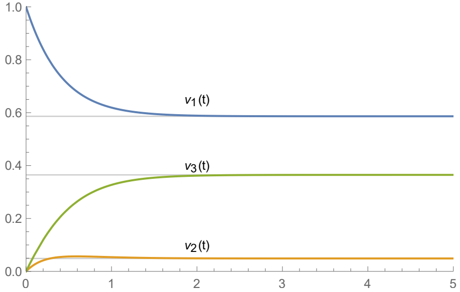
c) *Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor hosszú távon az idő x_i részét tölti az i állapotban, ahol $v_{st} = (x_1 \ \dots \ x_k)$.*

Példa

$\lim_{t\to\infty} v(t) = v_{\mathrm{st}}$ konvergenciasebessége gyors, hasonlóan a diszkrét idejű esethez. A korábbi példára

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

és $v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, esetén $v(t)$ (a 3 színes függvény) és v_{st} (szürke vízszintes vonalak) alakulása:



A fő tétel alapján a hosszú távú közelítés e^{Qt}-re

$$e^{Qt} \approx \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix} \qquad \text{ha } t \text{ nagy.}$$

Közelítések e^{Qt}-re

A fő tétel alapján a hosszú távú közelítés e^{Qt}-re

$$e^{Qt} \approx \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix} \qquad \text{ha } t \text{ nagy.}$$

A rövid távú közelítés

$$e^{Qt} \approx I + tQ \qquad \text{ha } t \text{ kicsi.}$$

(Ez tulajdonképpen az e^x függvény elsőrendű közelítése.)

Közelítések e^{Qt}-re

A fő tétel alapján a hosszú távú közelítés e^{Qt}-re

$$e^{Qt} \approx \begin{bmatrix} v_{\mathrm{st}} \\ \hline \vdots \\ \hline v_{\mathrm{st}} \end{bmatrix} \qquad \text{ha } t \text{ nagy.}$$

A rövid távú közelítés

$$e^{Qt} \approx I + tQ \qquad \text{ha } t \text{ kicsi.}$$

(Ez tulajdonképpen az e^x függvény elsőrendű közelítése.)

A rövid távú közelítésnek van egy érdekes értelmezése: ha t kicsi, akkor t idő alatt lehet

- 0 átmenet 1-hez közeli valószínűséggel;
- 1 átmenet t-vel arányos valószínűséggel, és
- 2 vagy több átmenet valószínűsége ezekhez képest elhanyagolható.

Tétel. (Ergodtétel)

Ha egy irreducibilis Markov-lánc konkrét realizációját

$$X(t), \qquad t \geq 0$$

jelöli, akkor tetszőleges f, állapotokon értelmezett függvényre

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^T f(X(t))\mathrm{d}t}{T} = \mathbb{E}_{st}(f),$$

ahol

$$\mathbb{E}_{st}(f) = x_1 f(1) + \cdots + x_k f(k),$$

ahol

$$v_{st} = (\, x_1 \; \ldots \; x_k \,).$$

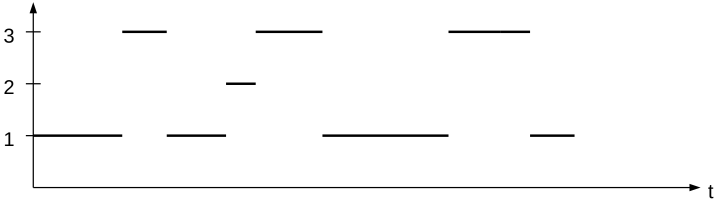
Beágyazott Markov-lánc

Egy folytonos idejű Markov-lánc beágyazott Markov-lánca a meglátogatott állapotok sorozata, ami egy diszkrét idejű Markov-lánc.

Beágyazott Markov-lánc

Egy folytonos idejű Markov-lánc beágyazott Markov-lánca a meglátogatott állapotok sorozata, ami egy diszkrét idejű Markov-lánc.

A korábbi példára a



realizációnak megfelelő beágyazott Markov-lánc realizáció

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 1, \ldots$$

Beágyazott Markov-lánc

Számítsuk ki a beágyazott Markov-lánc P átmenet-valószínűség mátrixát. A példában

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Az 1-es állapotból a lehetséges átmenetek $1 \to 2$ és $1 \to 3$, és

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 2 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{1/3}{1/3 + 2/3} = 1/3,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{2/3}{1/3 + 2/3} = 2/3.$$

Beágyazott Markov-lánc

Számítsuk ki a beágyazott Markov-lánc P átmenet-valószínűség mátrixát. A példában

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Az 1-es állapotból a lehetséges átmenetek $1 \to 2$ és $1 \to 3$, és

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 2 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{1/3}{1/3 + 2/3} = 1/3,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{2/3}{1/3 + 2/3} = 2/3.$$

Ez alapján P' első sora

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

P' második sorához

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 1|\text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3|\text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5.$$

(A $4/5 + 16/5$ nevező egyébként pont megegyezik $|q_{22}| = 4$-gyel, mivel Q minden sorának összege 0.)

Beágyazott Markov-lánc

P' második sorához

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 1 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5.$$

(A $4/5 + 16/5$ nevező egyébként pont megegyezik $|q_{22}| = 4$-gyel, mivel Q minden sorának összege 0.)

A fenti számítások összefoglalva: P'-t úgy kapjuk, hogy először Q i-edik sorát leosztjuk $|q_{ii}|$-vel minden i-re, majd hozzáadjuk az I identitásmátrixot.

P' második sorához

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 1|\text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3|\text{a jelenlegi állapot } 2) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5.$$

(A $4/5 + 16/5$ nevező egyébként pont megegyezik $|q_{22}| = 4$-gyel, mivel Q minden sorának összege 0.)

A fenti számítások összefoglalva: P'-t úgy kapjuk, hogy először Q i-edik sorát leosztjuk $|q_{ii}|$-vel minden i-re, majd hozzáadjuk az I identitásmátrixot. A végeredmény

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Beágyazott Markov-lánc

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Nem pont ugyanaz a mátrix! Az első két sor ugyanaz, de a harmadik eltérő.

Beágyazott Markov-lánc

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \to P - I \to Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Nem pont ugyanaz a mátrix! Az első két sor ugyanaz, de a harmadik eltérő.

Ennek oka, hogy az eredeti Markov-láncban a $3 \to 3$ átmenetnek pozitív a valószínűsége. A beágyazott Markov-láncra viszont a következő állapot mindig az, ami *ténylegesen eltér* az aktuális állapottól. Emiatt ami eredetileg egy állapotban eltöltött több lépés, az a beágyazott Markov-láncban egyetlen lépésként jelenik meg.

Beágyazott Markov-lánc

Tehát ha az eredeti P átmenet-valószínűség mátrixú Markov-lánc realizációja

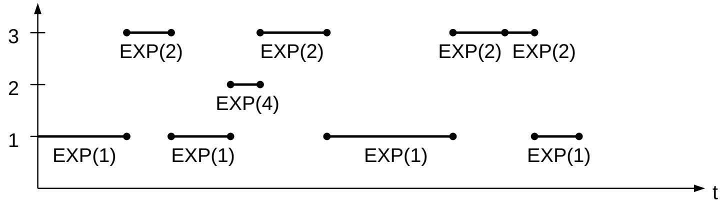
$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \ldots,$$

Beágyazott Markov-lánc

Tehát ha az eredeti P átmenet-valószínűség mátrixú Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \dots,$$

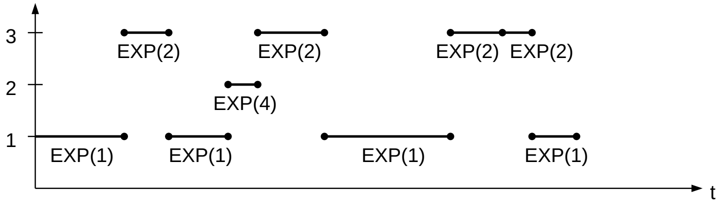
és a Q generátorú folytonos idejű Markov-lánc realizációja



Tehát ha az eredeti P átmenet-valószínűség mátrixú Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \ldots,$$

és a Q generátorú folytonos idejű Markov-lánc realizációja



akkor a P'-höz tartozó beágyazott Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 1, \ldots$$

Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_k)$ a Q generátorú CTMC stacionárius eloszlása, és legyen $u_{\mathrm{st}} = (y_1\, y_2\, \ldots\, y_k)$ a P' átmenet-valószínűség mátrixú beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlása. Jelöljük továbbá $\lambda_i = |q_{ii}|$-vel a kimenő rátákat. Ekkor

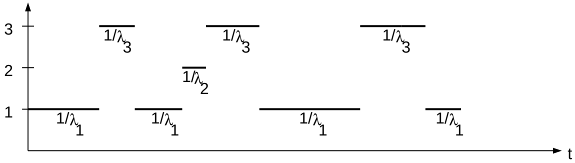
Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Legyen $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2\, \dots\, x_k)$ a Q generátorú CTMC stacionárius eloszlása, és legyen $u_{\mathrm{st}} = (y_1\, y_2\, \dots\, y_k)$ a P' átmenet-valószínűség mátrixú beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlása. Jelöljük továbbá $\lambda_i = |q_{ii}|$-vel a kimenő rátákat. Ekkor

Lemma

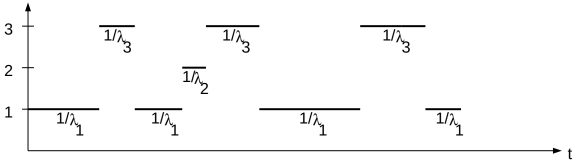
$$x_i = \frac{y_i/\lambda_i}{\sum_j y_j/\lambda_j} \qquad\qquad y_i = \frac{x_i\lambda_i}{\sum_j x_j\lambda_j}.$$

Biz. y_i az i állapotban eltöltött intervallumok *számának aránya* az összes intervallumon belül. Viszont az intervallumok nem egyforma hosszúak.



Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Biz. y_i az i állapotban eltöltött intervallumok *számának aránya* az összes intervallumon belül. Viszont az intervallumok nem egyforma hosszúak.

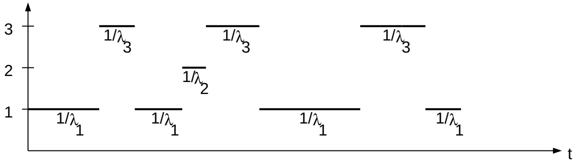


x_i az i állapotban eltöltött *idő aránya* a teljes időhöz képest. Az intervallum darabszámának arányához képest ezt még súlyozni kell az intervallumok hosszával is. Az i állapotban eltöltött idő átlagos hossza $1/\lambda_i$, ahonnan

$$x_i = \frac{y_i/\lambda_i}{\sum_j y_j/\lambda_j}.$$

Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Biz. y_i az i állapotban eltöltött intervallumok *számának aránya* az összes intervallumon belül. Viszont az intervallumok nem egyforma hosszúak.



x_i az i állapotban eltöltött *idő aránya* a teljes időhöz képest. Az intervallum darabszámának arányához képest ezt még súlyozni kell az intervallumok hosszával is. Az i állapotban eltöltött idő átlagos hossza $1/\lambda_i$, ahonnan

$$x_i = \frac{y_i/\lambda_i}{\sum_j y_j/\lambda_j}.$$

(A nevező csak normalizálás.) A lemma másik képlete ekvivalens.