Markov-sorok

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/11/14

Emlékeztető. Folytonos idejű Markov-láncokban állapotváltozás (átmenet) tetszőleges valós időben történhet.

Az egyes állapotokban eltöltött idő exponenciális. A Q infinitezimális generátor mátrix főátlón kívüli elemei a lehetséges átmenetekhez tartozó ráták. A lehetséges átmenetek versenyeznek egymással.

Folytonos idejű Markov-láncok

Emlékeztető. Folytonos idejű Markov-láncokban állapotváltozás (átmenet) tetszőleges valós időben történhet.

Az egyes állapotokban eltöltött idő exponenciális. A Q infinitezimális generátor mátrix főátlón kívüli elemei a lehetséges átmenetekhez tartozó ráták. A lehetséges átmenetek versenyeznek egymással.

Hosszú távú viselkedés: stacionáriushoz való konvergencia, ergodtétel teljesül.

Rövid távú viselkedés: $e^{Qt} \approx I + tQ$, ha t kicsi.

Folytonos idejű Markov-láncok

Emlékeztető. Folytonos idejű Markov-láncokban állapotváltozás (átmenet) tetszőleges valós időben történhet.

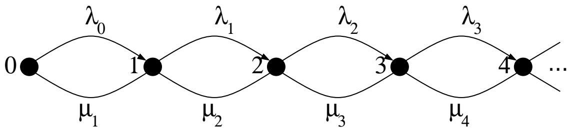
Az egyes állapotokban eltöltött idő exponenciális. A Q infinitezimális generátor mátrix főátlón kívüli elemei a lehetséges átmenetekhez tartozó ráták. A lehetséges átmenetek versenyeznek egymással.

Hosszú távú viselkedés: stacionáriushoz való konvergencia, ergodtétel teljesül.

Rövid távú viselkedés: $e^{Qt} \approx I + tQ$, ha t kicsi.

Beágyazott (diszkrét idejű) Markov-lánc és kapcsolata az eredeti folytonos idejű Markov-lánccal.

Megvizsgáljuk Markov-láncok egy osztályát, aminek speciális szerkezete van. Ha a Markov-lánc állapotai $0, 1, 2 \ldots$, és átmenetek csak szomszédos állapotok között történhetnek, akkor ez egy *születési-halálozási* folyamat vagy *Markov-sor*.



Az állapotok száma lehet véges vagy végtelen. Általában λ_i jelöli az $i \to i+1$ átmenet rátáját és μ_i az $i \to i-1$ átmenet rátáját.

Markov-sor

Születési-halálozási folyamatnak azért hívjuk, mert használható populáció változás modellezésére. Ilyenkor a felfelé történő átmenet megfelel egy születésnek, és a lefelé történő átmenet egy halálozásnak a populáción belül.

Markov-sor

Születési-halálozási folyamatnak azért hívjuk, mert használható populáció változás modellezésére. Ilyenkor a felfelé történő átmenet megfelel egy születésnek, és a lefelé történő átmenet egy halálozásnak a populáción belül.

Markov-sornak azért szokás hívni, mert sorhossz változás modellezésére is használható (lásd a múltkori példát a pénzváltóval). Ilyenkor egy $+1$-es átmenet megfelel egy új ügyfél/igény érkezésének, míg egy -1-es átmenet megfelel egy kiszolgálásnak. Azért Markov, mert ha a kiszolgálási idő és az érkezési időköz mindkettő exponenciális eloszlású, akkor ez egy folytonos idejű Markov-lánc.

Markov-sor

Minden Markov-sor irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a fő tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

Minden Markov-sor irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a fő tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

Ha a Markov-sor végtelen állapotterű, akkor a helyzet nem ilyen egyszerű. Ilyenkor előrdulhat, hogy v_{st} nem is létezik.

Minden Markov-sor irreducibilis; ha véges állapotterű, akkor a fő tétel szerint v_{st} létezik és egyértelmű, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ tetszőleges $v(0)$ esetén.

Ha a Markov-sor végtelen állapotterű, akkor a helyzet nem ilyen egyszerű. Ilyenkor előrdulhat, hogy v_{st} nem is létezik.

Viszont a következő tétel minden Markov-sorra teljesül.

Tétel. (Dinamikus egyensúly egyenletek)

Bármely (véges vagy végtelen állapotterű) Markov-sorra, ha $(x_0\ x_1\ x_2\ \ldots)$ *stacionárius eloszlás, akkor*

$$x_i \lambda_i = x_{i+1} \mu_{i+1}.$$

Első biz. (vázlat) Közvetlenül levezethető a

$$v_{\mathrm{st}} Q = 0$$

egyenletrendszerből átrendezéssel. (Házi feladat meggondolni.)

Első biz. (vázlat) Közvetlenül levezethető a

$$v_{\mathrm{st}}\, Q = 0$$

egyenletrendszerből átrendezéssel. (Házi feladat meggondolni.)

Második biz. Az i és $i+1$ közötti határvonalat csak az $i \to i+1$ és az $i+1 \to i$ átmenetek lépik át. Stacionárius eloszlás esetén ezeknek a hosszú távú gyakorisága meg kell, hogy egyezzen.

Első biz. (vázlat) Közvetlenül levezethető a

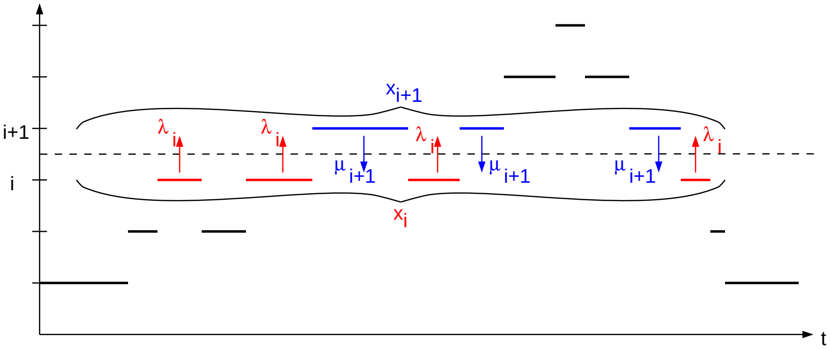
$$v_{\mathrm{st}}Q = 0$$

egyenletrendszerből átrendezéssel. (Házi feladat meggondolni.)

Második biz. Az i és $i+1$ közötti határvonalat csak az $i \to i+1$ és az $i+1 \to i$ átmenetek lépik át. Stacionárius eloszlás esetén ezeknek a hosszú távú gyakorisága meg kell, hogy egyezzen.

Az $i \to i+1$ átlépés rátája λ_i, de csak akkor, ha a folyamat i-ben van. A folyamat az idő x_i részében tartózkodik az i állapotban, így hosszú távon az $i \to i+1$ átlépések sűrűsége (rátája) $x_i\lambda_i$; hasonlóan az $i+1 \to i$ átlépések sűrűsége $x_{i+1}\mu_{i+1}$, és hosszú távon ez a két sűrűség megegyezik.

Markov-sor



M/M/1/K sor

A Markov-sorokon belül egy speciális osztály az M/M/1/K sor. Ez egy olyan szervert modellez, amihez tartozik egy K kapacitású buffer (K csomagot képes tárolni, beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is).

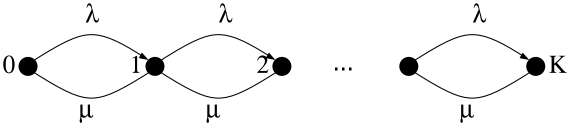
M/M/1/K sor

A Markov-sorokon belül egy speciális osztály az M/M/1/K sor. Ez egy olyan szervert modellez, amihez tartozik egy K kapacitású buffer (K csomagot képes tárolni, beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is).

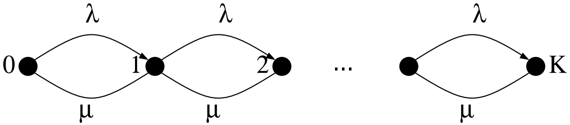
A szerver mindig az első csomag kiszolgálását végzi, amíg a többi csomag várakozik. Amikor a szerver végez az első csomag kiszolgálásával, az kiürül a rendszerből és a szerver azonnal elkezdi a következő csomag kiszolgálását. Az érkező csomagok a sor végére kerülnek, vagy ha a sor tele van, elvesznek.

Az érkezési folyamat PPP λ rátával; a kiszolgálási idő EXP(μ) eloszlású.

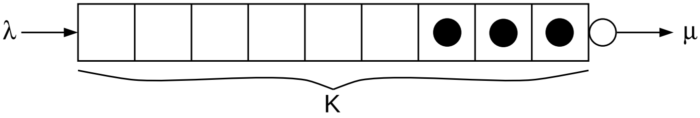
M/M/1/K sor



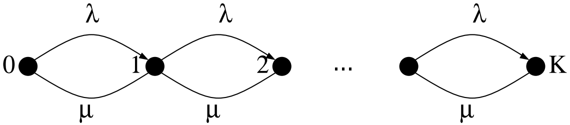
M/M/1/K sor



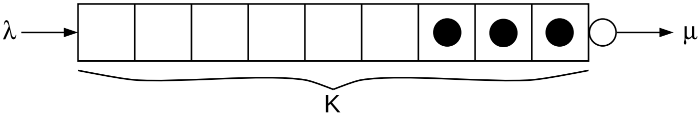
Gyakran ábrázolják így:



M/M/1/K sor



Gyakran ábrázolják így:



Az M/M/1/K jelölésben az első M a markovi érkezésre utal, a második M a markovi kiszolgálásra, az 1 a szerverek száma és K a buffer mérete. Ez az ún. Kendall-féle jelölés.

M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.

M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.

Számítsuk ki M/M/1 sorra a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\ x_1\ \dots)$ stacionárius eloszlást! A dinamikus egyensúly egyenletekből

$$x_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot x_i,$$

M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.

Számítsuk ki M/M/1 sorra a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\ x_1\ \ldots)$ stacionárius eloszlást! A dinamikus egyensúly egyenletekből

$$x_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot x_i,$$

tehát

$$x_1 = \frac{\lambda}{\mu} x_0, \qquad x_2 = \frac{\lambda}{\mu} x_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 x_0$$

stb.

M/M/1 sor

Az M/M/1 sor annyiban különbözik az M/M/1/K sortól, hogy a buffer mérete végtelen.

Számítsuk ki M/M/1 sorra a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\ x_1\ \dots)$ stacionárius eloszlást! A dinamikus egyensúly egyenletekből

$$x_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot x_i,$$

tehát

$$x_1 = \frac{\lambda}{\mu} x_0, \qquad x_2 = \frac{\lambda}{\mu} x_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 x_0$$

stb. Általában

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n x_0.$$

M/M/1 sor

Még szükségünk van x_0 értékére. Tudjuk, hogy

$$1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n .$$

M/M/1 sor

Még szükségünk van x_0 értékére. Tudjuk, hogy

$$1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

Ha $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, a szumma véges:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \lambda/\mu},$$

és a dinamikus egyensúly egyenletek megoldása

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu).$$

M/M/1 sor

Még szükségünk van x_0 értékére. Tudjuk, hogy

$$1 = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n .$$

Ha $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, a szumma véges:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \frac{1}{1 - \lambda/\mu},$$

és a dinamikus egyensúly egyenletek megoldása

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu).$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a sor *stabil*; v_{st} egyértelműen létezik, és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ amint $t \to \infty$ is teljesül tetszőleges $v(0)$ esetén. (Utóbbit nem biz.)

Azonban ha $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty.$$

Ebben az esetben x_0 értéke $\frac{1}{\infty} = 0$ lenne, de akkor $0 = x_0 = x_1 = \dots$, tehát $x_0 + x_1 + \cdots = 1$ nem teljesül.

Azonban ha $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty.$$

Ebben az esetben x_0 értéke $\frac{1}{\infty} = 0$ lenne, de akkor $0 = x_0 = x_1 = \dots$, tehát $x_0 + x_1 + \cdots = 1$ nem teljesül.

Összességében a $\lambda \geq \mu$ esetben a dinamikus egyensúly egyenleteknek nincs megoldása, és nem létezik stacionárius eloszlás.

M/M/1 sor

Azonban ha $\frac{\lambda}{\mu} \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \infty.$$

Ebben az esetben x_0 értéke $\frac{1}{\infty} = 0$ lenne, de akkor $0 = x_0 = x_1 = \ldots$, tehát $x_0 + x_1 + \cdots = 1$ nem teljesül.

Összességében a $\lambda \geq \mu$ esetben a dinamikus egyensúly egyenleteknek nincs megoldása, és nem létezik stacionárius eloszlás.

Intuitívan a következő történik: ha $\lambda > \mu$, az érkezési ráta nagyobb, mint a kiszolgálási ráta, és hosszú távon a csomagok egyre csak gyűlnek a sorban, és a sorhossz tart a végtelenhez, azaz nem konvergál semmilyen (stacionárius) eloszláshoz.

M/M/1 sor

- A $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ eset a *stabil* M/M/1 sor. Lényegében úgy viselkedik, mint a véges állapotterű irreducibilis Markov-láncok, azaz v_{st} egyértelműen létezik és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ is teljesül.
- A $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ eset a *kritikus* M/M/1 sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz felfelé vagy lefelé is változhat véletlenszerűen. (Egyébként a sor minden állapotot végtelen sokszor meglátogat; minden állapot null-rekurrens.)
- A $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ eset az *instabil* sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz hosszú távon végtelenhez tart.

M/M/1 sor

- A $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ eset a *stabil* M/M/1 sor. Lényegében úgy viselkedik, mint a véges állapotterű irreducibilis Markov-láncok, azaz v_{st} egyértelműen létezik és $v(t) \to v_{\mathrm{st}}$ is teljesül.
- A $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ eset a *kritikus* M/M/1 sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz felfelé vagy lefelé is változhat véletlenszerűen. (Egyébként a sor minden állapotot végtelen sokszor meglátogat; minden állapot null-rekurrens.)
- A $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ eset az *instabil* sor. Ilyenkor v_{st} nem létezik, és a sorhossz hosszú távon végtelenhez tart.

A

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

arány a sor *terhelése*; a stabilitás feltétele az M/M/1 sorra tehát $\rho < 1$.

Stabilitás feltétele

Olyan végtelen állapotterű Markov-sornál, amikor λ_i és μ_i nem konstans, a stabilitás feltétele

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} < \infty.$$

Stabilitás feltétele

Olyan végtelen állapotterű Markov-sornál, amikor λ_i és μ_i nem konstans, a stabilitás feltétele

$$\sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_k} < \infty.$$

M/M/c és M/M/c/K az M/M/1-hez és M/M/1/K-hoz hasonló sorokat jelölnek, csak 1 helyett c darab szerverrel, amelyek mindegyikének a kiszolgálási rátája μ. Minden szerver mindig egy csomagon dolgozik (amíg a buffer ki nem ürül), és kiszolgálás után egyből elkezdi a következőt kiszolgálni. Az M/M/c sorra a stabilitás feltétele

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1,$$

ahol λ az érkezési ráta és μ egy szerver kiszolgálási rátája.

Várakozási idő

Sorbanállási problémáknál egy fontos jellemző a *várakozási idő* vagy *rendszerben töltött idő*, ami a sorba való beérkezés pillanatától a kiszolgálás végéig eltelt idő. Ez általában véletlenszerű; érdekes akár a teljes eloszlása is, de ha egyetlen számmal kell jellemezni, akkor az általában a várható értéke.

Várakozási idő

Sorbanállási problémáknál egy fontos jellemző a *várakozási idő* vagy *rendszerben töltött idő*, ami a sorba való beérkezés pillanatától a kiszolgálás végéig eltelt idő. Ez általában véletlenszerű; érdekes akár a teljes eloszlása is, de ha egyetlen számmal kell jellemezni, akkor az általában a várható értéke.

Az eddig tárgyaltak (pl. a sorhossz stacionárius eloszlása) az átlagos várakozási időről közvetlenül nem adnak információt. Szerencsére van az átlagos várakozási időre egy egyszerű formula.

Little-formula

Tétel. (Little-formula)

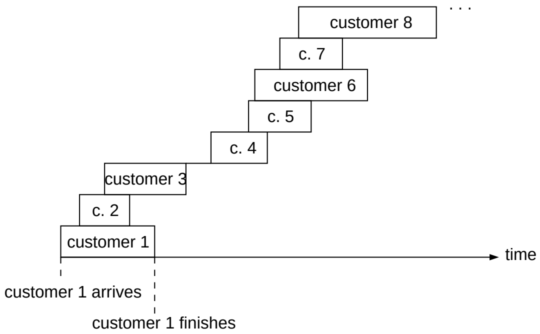
$$L = \lambda_e W,$$

ahol

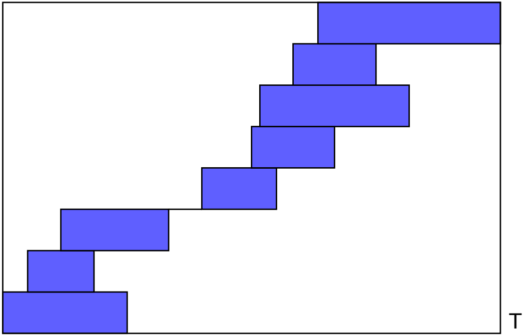
- *W az átlagos várakozási idő értéke.*
- *λ_e az effektív érkezési ráta; véges sor esetén a teli buffer miatt elveszett érkezések nem számítanak bele λ_e-be.*
- *L az átlagos sorhossz. Ez a stacionárius eloszlásból könnyen megkapható az ergodtétel révén:*

$$L = 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots$$

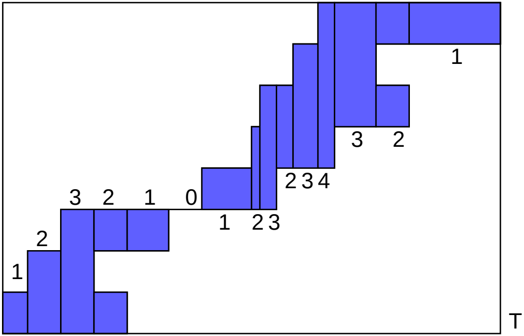
Biz. (vázlat) Ábrázoljuk az igényeket a következő módon (az érkezés ideje szerint rendezve):



Little-formula



Nagy T esetén a téglalapok száma T-ig $\lambda_e T + o(T)$ a NSzT alapján, egy téglalap területe pedig átlagosan W, tehát a kék terület összesen $B = \lambda_e TW + o(T)$.



Másrészt a kék területet T-vel osztva éppen az átlagos sorhosszt kapjuk meg:

$$L = \frac{B}{T} = \frac{\lambda_e T W}{T} = \lambda_e W.$$

Megjegyzések.
Véges Markov-sorra λ_e kiszámítható a stacionárius eloszlásból:

$$\lambda_e = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_K x_K,$$

speciálisan ha az érkezési ráta konstans λ, akkor ez a következő alakban is írható:

$$\lambda_e = \lambda(1 - x_K).$$

Little-formula

Megjegyzések.
Véges Markov-sorra λ_e kiszámítható a stacionárius eloszlásból:

$$\lambda_e = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_K x_K,$$

speciálisan ha az érkezési ráta konstans λ, akkor ez a következő alakban is írható:

$$\lambda_e = \lambda(1 - x_K).$$

Végtelen, stabil sorra pedig, ha az érkezési ráta konstans λ, akkor

$$\lambda_e = \lambda.$$

Little-formula

Mi most Markov-sorokra mondtuk ki, de a Little-formula gyakorlatilag tetszőleges sorbanállási rendszerre teljesül, például a következő esetekben:

- ha például az érkezési időköz vagy a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású (ilyenkor a sor nem is Markov-lánc);
- ha a rendszer nem beérkezési sorrendben szolgálja ki az igényeket;
- ha több sorból áll a rendszer (sőt, ilyenkor igaz külön-külön az egyes sorokra és globálisan az egész rendszerre is).

Little-formula

Mi most Markov-sorokra mondtuk ki, de a Little-formula gyakorlatilag tetszőleges sorbanállási rendszerre teljesül, például a következő esetekben:

- ha például az érkezési időköz vagy a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású (ilyenkor a sor nem is Markov-lánc);
- ha a rendszer nem beérkezési sorrendben szolgálja ki az igényeket;
- ha több sorból áll a rendszer (sőt, ilyenkor igaz külön-külön az egyes sorokra és globálisan az egész rendszerre is).

Viszont a Little-formula csak az összes beérkező igényre kiátlagolt várakozási időt számítja ki. Mi a helyzet a teljes eloszlással?

Erlang eloszlás

Következőnek az M/M/1 sor kiszolgálási idejének eloszlását szeretnénk kiszámítani, de ehhez előkészületeket kell tenni.

Ha $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor

$$Y = X_1 + \cdots + X_n$$

eloszlását Erlang eloszlásnak nevezzük n és λ paraméterekkel (röviden $Y \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$);

Erlang eloszlás

Következőnek az M/M/1 sor kiszolgálási idejének eloszlását szeretnénk kiszámítani, de ehhez előkészületeket kell tenni.

Ha $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor

$$Y = X_1 + \cdots + X_n$$

eloszlását Erlang eloszlásnak nevezzük n és λ paraméterekkel (röviden $Y \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$); a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \qquad (x \geq 0),$$

Erlang eloszlás

Következőnek az M/M/1 sor kiszolgálási idejének eloszlását szeretnénk kiszámítani, de ehhez előkészületeket kell tenni.

Ha $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor

$$Y = X_1 + \cdots + X_n$$

eloszlását Erlang eloszlásnak nevezzük n és λ paraméterekkel (röviden $Y \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$); a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \qquad (x \geq 0),$$

eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \qquad (x \geq 0),$$

várható értéke $\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{\lambda}$.

Erlang eloszlás

Következőnek az M/M/1 sor kiszolgálási idejének eloszlását szeretnénk kiszámítani, de ehhez előkészületeket kell tenni.

Ha $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor

$$Y = X_1 + \cdots + X_n$$

eloszlását Erlang eloszlásnak nevezzük n és λ paraméterekkel (röviden $Y \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$); a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \qquad (x \geq 0),$$

eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \qquad (x \geq 0),$$

várható értéke $\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{\lambda}$.

Speciálisan $\mathrm{Erlang}(1, \lambda) = \mathrm{EXP}(\lambda)$.

Kapcsolat a geometriai és exponenciális eloszlás között

Lemma

Ha $X_1, \ldots, X_n \sim EXP(\lambda)$ *függetlenek, és* $N \sim GEO(p)$ *tőlük független, akkor*

$$Y = X_1 + \cdots + X_N$$

eloszlása

$$Y \sim EXP(p\lambda).$$

Lemma

Ha $X_1, \ldots, X_n \sim EXP(\lambda)$ függetlenek, és $N \sim GEO(p)$ tőlük független, akkor

$$Y = X_1 + \cdots + X_N$$

eloszlása

$$Y \sim EXP(p\lambda).$$

Biz. Azon feltétel mellett, hogy $N = n$, Y feltételes eloszlása Erlang(k, λ). Teljes valószínűség tételét használjuk Y sűrűségfüggvényére:

$$f_Y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} = p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p)x)^{n-1}}{(n-1)!} =$$
$$= p\lambda e^{-\lambda x} e^{\lambda(1-p)x} = p\lambda e^{-p\lambda x},$$

ami éppen EXP$(p\lambda)$ sűrűségfüggvénye.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

Tekintsünk egy stacionárius M/M/1 sort. Az érkezési ráta λ, a kiszolgálási ráta μ, $\lambda < \mu$. A sor terhelése

$$\rho = \lambda/\mu < 1.$$

Tétel.

(a) *Az M/M/1 sor stacionárius sorhossz eloszlása PGEO($1-\rho$).*

(b) *Feltéve, hogy egy igény a sorban a k-adik helyre érkezik (vagyis beérkezéskor $k-1$ igény van előtte), a kiszolgálási idő eloszlása Erlang(k, λ).*

(c) *Egy véletlen igény várakozási ideje EXP($(1-\rho)\mu$).*

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

Biz.

(a) Az M/M/1 sor stacionárius sorhossz eloszlása PGEO$(1-\rho)$.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

Biz.

(a) Az M/M/1 sor stacionárius sorhossz eloszlása PGEO$(1-\rho)$.

Már kiszámoltuk a dinamikus egyensúly egyenletekből, hogy $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1\, \dots)$-re

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu) = \rho^n(1-\rho),$$

ami éppen a PGEO$(1-\rho)$ eloszlás.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

Biz.

(a) Az M/M/1 sor stacionárius sorhossz eloszlása PGEO$(1-\rho)$.

Már kiszámoltuk a dinamikus egyensúly egyenletekből, hogy $v_{\text{st}} = (x_0\, x_1\, \dots)$-re

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu) = \rho^n(1-\rho),$$

ami éppen a PGEO$(1-\rho)$ eloszlás.

(b) Feltéve, hogy egy igény a sorban a k-adik helyre érkezik (vagyis beérkezéskor $k-1$ igény van előtte), a kiszolgálási idő eloszlása Erlang(k, λ).

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

Biz.

(a) Az M/M/1 sor stacionárius sorhossz eloszlása PGEO$(1-\rho)$.

Már kiszámoltuk a dinamikus egyensúly egyenletekből, hogy $v_{\text{st}} = (x_0\, x_1\, \dots)$-re

$$x_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot (1 - \lambda/\mu) = \rho^n(1-\rho),$$

ami éppen a PGEO$(1-\rho)$ eloszlás.

(b) Feltéve, hogy egy igény a sorban a k-adik helyre érkezik (vagyis beérkezéskor $k-1$ igény van előtte), a kiszolgálási idő eloszlása Erlang(k, λ).

Az aktuális igény távozásához ki kell szolgálni az előtte lévő $k-1$ igényt és az aktuális igényt is; mindegyiknek a kiszolgálási ideje EXP(λ) eloszlású, és k darab EXP(λ) eloszlás konvolúciója éppen az Erlang(k, λ) eloszlás.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

(c) Egy véletlen igény várakozási ideje $\mathrm{EXP}((1-\rho)\mu)$.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

(c) Egy véletlen igény várakozási ideje $\mathrm{EXP}((1-\rho)\mu)$.

Itt annyi különbség van a (b) részhez képest, hogy a beérkező igény egy véletlen hosszú sorba érkezik.

Kérdés: milyen sorhossz-eloszlást lát a beérkező igény?

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

(c) Egy véletlen igény várakozási ideje EXP$((1-\rho)\mu)$.

Itt annyi különbség van a (b) részhez képest, hogy a beérkező igény egy véletlen hosszú sorba érkezik.

Kérdés: milyen sorhossz-eloszlást lát a beérkező igény?

A sorhossz stacionárius eloszlását látja a beérkező igény is.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

(c) Egy véletlen igény várakozási ideje $\mathrm{EXP}((1-\rho)\mu)$.

Itt annyi különbség van a (b) részhez képest, hogy a beérkező igény egy véletlen hosszú sorba érkezik.

Kérdés: milyen sorhossz-eloszlást lát a beérkező igény?

A sorhossz stacionárius eloszlását látja a beérkező igény is.

A sorhossz stacionárius eloszlása $\mathrm{PGEO}(1-\rho)$, a beérkező igénnyel együtt az igények száma eggyel nagyobb, azaz $\mathrm{GEO}(1-\rho)$ eloszlású, és ennyi darab független $\mathrm{EXP}(\mu)$ eloszlás összege az előző lemma szerint éppen $\mathrm{EXP}((1-\rho)\mu)$ eloszlású.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

(c) Egy véletlen igény várakozási ideje EXP$((1-\rho)\mu)$.

Itt annyi különbség van a (b) részhez képest, hogy a beérkező igény egy véletlen hosszú sorba érkezik.

Kérdés: milyen sorhossz-eloszlást lát a beérkező igény?

A sorhossz stacionárius eloszlását látja a beérkező igény is.

A sorhossz stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$, a beérkező igénnyel együtt az igények száma eggyel nagyobb, azaz GEO$(1-\rho)$ eloszlású, és ennyi darab független EXP(μ) eloszlás összege az előző lemma szerint éppen EXP$((1-\rho)\mu)$ eloszlású.

Kitekintés: általános Markov-sorra a várakozási idő eloszlása Laplace-transzformálttal számolható.

PASTA-elv

M/M/1 sorra egy véletlenszerű beérkező igény a stacionárius sorhossz-eloszlást látja.

PASTA-elv

M/M/1 sorra egy véletlenszerű beérkező igény a stacionárius sorhossz-eloszlást látja.

Ez más Markov-sorokra is teljesül, egészen pontosan abban az esetben, ha az érkezési ráta konstans λ minden állapotra. Ez PASTA-elv (Poisson Arrival Sees Time Average) vagy Érkezési tétel (Arrival theorem) néven is ismert.

M/M/1 sorra egy véletlenszerű beérkező igény a stacionárius sorhossz-eloszlást látja.

Ez más Markov-sorokra is teljesül, egészen pontosan abban az esetben, ha az érkezési ráta konstans λ minden állapotra. Ez PASTA-elv (Poisson Arrival Sees Time Average) vagy Érkezési tétel (Arrival theorem) néven is ismert.

Sőt, ez a tulajdonság még olyan (nem-markovi) sorokban is teljesül, ahol a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a rendszer nem folytonos idejű Markov-lánc, és nincs stacionárius eloszlás, hanem helyette hosszú távú időátlag szerepel - de erre teljesül, hogy a véletlenszerű beérkező igény pont ezt az eloszlást látja.

PASTA-elv

M/M/1 sorra egy véletlenszerű beérkező igény a stacionárius sorhossz-eloszlást látja.

Ez más Markov-sorokra is teljesül, egészen pontosan abban az esetben, ha az érkezési ráta konstans λ minden állapotra. Ez PASTA-elv (Poisson Arrival Sees Time Average) vagy Érkezési tétel (Arrival theorem) néven is ismert.

Sőt, ez a tulajdonság még olyan (nem-markovi) sorokban is teljesül, ahol a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a rendszer nem folytonos idejű Markov-lánc, és nincs stacionárius eloszlás, hanem helyette hosszú távú időátlag szerepel - de erre teljesül, hogy a véletlenszerű beérkező igény pont ezt az eloszlást látja.

Nem biz., de lényegében azon múlik, hogy a beérkező igények "függetlenek" a sor hosszától.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Az exponenciális eloszlás memóriamentes/örökifjú:

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0,$$

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Az exponenciális eloszlás memóriamentes/örökifjú:

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0,$$

de a valóságban van sok releváns eloszlás, amik nem ilyenek. Azt mondjuk, hogy egy eloszlás *öregedő*, ha

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) < \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0,$$

és *fiatalodó*, ha

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) > \mathbb{P}(T > s) \qquad \forall s, t > 0.$$

(Vannak olyan eloszlások, amikre a fentiek egyike sem igaz.)

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora.

Fiatalodó eloszlásra példa: sztálingrádi dezertőr.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora.

Fiatalodó eloszlásra példa: sztálingrádi dezertőr.

Fiatalodó eloszlásra másik példa: időnként lefagyó szerver. Ha a kiszolgálás külön jelzés nélkül lefagyhat, és onnan nagyon sok/végtelen ideig tartana, az is fiatalodó eloszlás: ahogy telik az idő kiszolgálás nélkül, egyre nagyobb a valószínűsége, hogy a szerver lefagyott, és ilyenkor a hátralévő idő eloszlása tipikusan nagyobb, mint az elején, hiába vártunk már valamennyit.

Kitérő: öregedő és fiatalodó eloszlások

Öregedő eloszlás például az emberek hátralévő életkora.

Fiatalodó eloszlásra példa: sztálingrádi dezertőr.

Fiatalodó eloszlásra másik példa: időnként lefagyó szerver. Ha a kiszolgálás külön jelzés nélkül lefagyhat, és onnan nagyon sok/végtelen ideig tartana, az is fiatalodó eloszlás: ahogy telik az idő kiszolgálás nélkül, egyre nagyobb a valószínűsége, hogy a szerver lefagyott, és ilyenkor a hátralévő idő eloszlása tipikusan nagyobb, mint az elején, hiába vártunk már valamennyit.

A Little-formula olyan esetekben sérülhet, ha egy részben elvégzett munka/kiszolgálás "elveszhet", pl. valamilyen okból egy igény kiszolgálása újrakezdődik. Fontos: ez csak nem-markovi kiszolgálás esetén fordulhat elő.

Az M/G/1 sorban a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a sor nem Markov-lánc, és másfajta eszközökkel lehet elemezni. A G az általános (general) eloszlást jelöli.

Kitekintés: egyéb sorok

Az M/G/1 sorban a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a sor nem Markov-lánc, és másfajta eszközökkel lehet elemezni. A G az általános (general) eloszlást jelöli.

G/M/1 egy olyan sort jelöl, ahol az érkezési időköz nem exponenciális eloszlású. Ez sem Markov-lánc.

Kitekintés: egyéb sorok

Az M/G/1 sorban a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a sor nem Markov-lánc, és másfajta eszközökkel lehet elemezni. A G az általános (general) eloszlást jelöli.

G/M/1 egy olyan sort jelöl, ahol az érkezési időköz nem exponenciális eloszlású. Ez sem Markov-lánc.

A G/G/1 sorban az érkezési időköz és a kiszolgálási idő is általános eloszlású.

2. feladat

Egy bankfiókban két ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Az ügyféltérben egyszerre legfeljebb 5 ügyfél tartózkodhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt lévőket is). Amikor az ügyféltér tele van, a biztonsági őr automatikusan elküldi a további ügyfeleket. A bankfiókba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 8 percet vesz igénybe. Ha egy ügyfelet kiszolgálnak, a sorban következő azonnal beáll a felszabaduló ablakhoz. Ha mindkét ablak szabad, amikor egy ügyfél érkezik, akkor találomra áll be valamelyikhez.

2. feladat

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

(b) Határozzuk meg a folyamat stacionárius eloszlását.

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

(d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?

(e) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?

(f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?

(g) Az idő mekkora részét tölti tétlenül az *első* ablaknál dolgozó ügyintéző?

2. feladat

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

2. feladat

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

Az állapotok 0, 1, 2, 3, 4, 5 a bent tartózkodó ügyfelek számának megfelelően. Feltéve, hogy az érkezés PPP szerint történik és a kiszolgálási idő EXP(1/8) a múlttól függetlenül, ez egy folytonos idejű Markov-folyamat.

2. feladat

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

Az állapotok 0, 1, 2, 3, 4, 5 a bent tartózkodó ügyfelek számának megfelelően. Feltéve, hogy az érkezés PPP szerint történik és a kiszolgálási idő EXP(1/8) a múlttól függetlenül, ez egy folytonos idejű Markov-folyamat.

Amíg mindkét ügyintéző dolgozik, a kiszolgálási ráta $1/8 + 1/8 = 2/8$. Ez egy M/M/2/5 sor.

2. feladat

(a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

Az állapotok 0, 1, 2, 3, 4, 5 a bent tartózkodó ügyfelek számának megfelelően. Feltéve, hogy az érkezés PPP szerint történik és a kiszolgálási idő EXP(1/8) a múlttól függetlenül, ez egy folytonos idejű Markov-folyamat.

Amíg mindkét ügyintéző dolgozik, a kiszolgálási ráta $1/8 + 1/8 = 2/8$. Ez egy M/M/2/5 sor.

$$Q = \begin{bmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/8 & -13/40 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/8 & -18/40 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/8 & -18/40 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/8 & -18/40 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/8 & -2/8 \end{bmatrix}.$$

2. feladat

(b) Határozzuk meg a folyamat stacionárius eloszlását.

(b) Határozzuk meg a folyamat stacionárius eloszlását.

Ez egy Markov-sor, tehát a dinamikus egyensúly egyenletek teljesülnek:

$$\frac{1}{8}x_1 = \frac{1}{5}x_0, \qquad \frac{2}{8}x_2 = \frac{1}{5}x_1, \qquad \frac{2}{8}x_3 = \frac{1}{5}x_2, \qquad \frac{2}{8}x_4 = \frac{1}{5}x_3,$$
$$\frac{2}{8}x_5 = \frac{1}{5}x_4, \qquad x_0 + x_1 + \cdots + x_5 = 1,$$

(b) Határozzuk meg a folyamat stacionárius eloszlását.

Ez egy Markov-sor, tehát a dinamikus egyensúly egyenletek teljesülnek:

$$\frac{1}{8}x_1 = \frac{1}{5}x_0, \qquad \frac{2}{8}x_2 = \frac{1}{5}x_1, \qquad \frac{2}{8}x_3 = \frac{1}{5}x_2, \qquad \frac{2}{8}x_4 = \frac{1}{5}x_3,$$
$$\frac{2}{8}x_5 = \frac{1}{5}x_4, \qquad x_0 + x_1 + \cdots + x_5 = 1,$$

ahonnét

$$x_0\left(1 + \frac{8}{5} + \frac{8}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{8}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{8}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{8}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4\right) = 1$$

és

$$v_{\mathrm{st}} = (0.157\ \ 0.251\ \ 0.201\ \ 0.160\ \ 0.128\ \ 0.103)\,.$$

2. feladat

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

2. feladat

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

$\mathbb{P}(\text{3 ügyfél van bent egy véletlen időpontban}) = x_3 = 0.160.$

2. feladat

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

$$\mathbb{P}(\text{3 ügyfél van bent egy véletlen időpontban}) = x_3 = 0.160.$$

(d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?

2. feladat

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

$\mathbb{P}(\text{3 ügyfél van bent egy véletlen időpontban}) = x_3 = 0.160.$

(d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?

Az ergodtétel szerint a bent tartózkodó ügyfelek átlagos száma hosszú távon

$$0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 2.161.$$

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

$\mathbb{P}(\text{3 ügyfél van bent egy véletlen időpontban}) = x_3 = 0.160.$

(d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?

Az ergodtétel szerint a bent tartózkodó ügyfelek átlagos száma hosszú távon

$$0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 2.161.$$

(e) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

$\mathbb{P}(3 \text{ ügyfél van bent egy véletlen időpontban}) = x_3 = 0.160.$

(d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?

Az ergodtétel szerint a bent tartózkodó ügyfelek átlagos száma hosszú távon

$$0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 = 2.161.$$

(e) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?

Ügyfeleket olyankor küldenek el, amikor az ügyféltér tele van, azaz a Markov-lánc az 5-ös állapotban tartózkodik. Ez az időnek az $x_5 = 0.103$ része. Az összes ügyfélnek is az $x_5 = 0.103$ része érkezik ilyenkor, mivel az érkezések függetlenek a bent tartózkodóak számától.

2. feladat

(f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?

2. feladat

(f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?

Little-formulát használunk; az effektív érkezési ráta

$$\lambda_e = (1 - x_5)\lambda = 0.897 \times 1/5 \approx 0.1794\,(1/\mathrm{perc}),$$

és a (d) részből $L = 2.161$, így

$$W = L/\lambda_e \approx 12\,(\mathrm{perc}).$$

(f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?

Little-formulát használunk; az effektív érkezési ráta

$$\lambda_e = (1 - x_5)\lambda = 0.897 \times 1/5 \approx 0.1794\,(1/\mathrm{perc}),$$

és a (d) részből $L = 2.161$, így

$$W = L/\lambda_e \approx 12\,(\mathrm{perc}).$$

(g) Az idő mekkora részét tölti tétlenül az *első* ablaknál dolgozó ügyintéző?

(f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?

Little-formulát használunk; az effektív érkezési ráta

$$\lambda_e = (1 - x_5)\lambda = 0.897 \times 1/5 \approx 0.1794\,(1/\mathrm{perc}),$$

és a (d) részből $L = 2.161$, így

$$W = L/\lambda_e \approx 12\,(\mathrm{perc}).$$

(g) Az idő mekkora részét tölti tétlenül az *első* ablaknál dolgozó ügyintéző?

A 0 állapotban mindkét ügyintéző tétlen. Az 1 állapotban egyikük dolgozik, a másik tétlen; az első ablaknál dolgozó ügyintéző az 1 állapotban töltött idő felében dolgozik hosszú távon átlagosan, és így az időnek összességében az

$$x_0 + \frac{1}{2}x_1 = 0.157 + \frac{1}{2}\cdot 0.251 = 0.282$$

részében tétlen.

8. feladat

A Faláb FC focicsapatának 5 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 3 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

Jelölje a sérült csatárok számát a t időpontban X_t.

8. feladat

(a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Mennyiben "modell" a Markov-lánc, azaz milyen feltételezéseket teszünk és azok mennyire jogosak?

(b) Írjuk fel a generátort. Figyeljünk az átmenet rátákra!

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

(d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?

(e) Átlagosan hány csatárral játszanak?

(f) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 3 nap múlva is minden csatár egészséges (a 3 napot tekinthetjük $1/10$ hónapnak).

(g) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad. Figyeljünk a megfogalmazásra!

Megoldás.

(a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Mennyiben "modell" a Markov-lánc, azaz milyen feltételezéseket teszünk és azok mennyire jogosak?

Megoldás.

(a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Mennyiben "modell" a Markov-lánc, azaz milyen feltételezéseket teszünk és azok mennyire jogosak?

Állapotok a sérült csatárok száma szerint: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Akkor lesz Markov-lánc, ha a sérülések között eltelt idő és a sérülések hossza (gyógyulási idő) is exponenciális eloszlású.

A sérülések között eltelt időről viszonylag jogos feltételezni, hogy exponenciális eloszlásúak (azaz a sérülések Poisson-folyamat szerint történnek).

A gyógyulási időről nem tudjuk, mennyire jogos az exponenciális feltételezés.

8. feladat

(b) Írjuk fel a generátort. Figyeljünk az átmenet rátákra!

(b) Írjuk fel a generátort. Figyeljünk az átmenet rátákra!

Arra kell figyelni, hogy egy csatár lesérülési rátája $1/3$, de ha több egészséges csatár van, akkor bármelyikük lesérülhet. Pl. 3 egészséges csatár esetén annak a rátája, hogy *bármelyikük* lesérül, $3 \cdot 1/3 = 1$. (2 egészséges csatár esetén $2/3$ stb.)

8. feladat

(b) Írjuk fel a generátort. Figyeljünk az átmenet rátákra!

Arra kell figyelni, hogy egy csatár lesérülési rátája $1/3$, de ha több egészséges csatár van, akkor bármelyikük lesérülhet. Pl. 3 egészséges csatár esetén annak a rátája, hogy *bármelyikük* lesérül, $3 \cdot 1/3 = 1$. (2 egészséges csatár esetén $2/3$ stb.)

A gyógyulásnál ugyanígy: egy csatár gyógyulási rátája 1, de ha pl. 2 sérült van, annak a rátája, hogy valamelyikük meggyógyul, $2 \cdot 1 = 2$ stb.

8. feladat

(b) Írjuk fel a generátort. Figyeljünk az átmenet rátákra!

Arra kell figyelni, hogy egy csatár lesérülési rátája $1/3$, de ha több egészséges csatár van, akkor bármelyikük lesérülhet. Pl. 3 egészséges csatár esetén annak a rátája, hogy *bármelyikük* lesérül, $3 \cdot 1/3 = 1$. (2 egészséges csatár esetén $2/3$ stb.)

A gyógyulásnál ugyanígy: egy csatár gyógyulási rátája 1, de ha pl. 2 sérült van, annak a rátája, hogy valamelyikük meggyógyul, $2 \cdot 1 = 2$ stb.

Innen

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -11/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -13/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

8. feladat

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

A dinamikus egyensúly egyenletek teljesülnek:

$$x_0 = x_1, \qquad x_1 = 2x_2, \qquad x_2 = 3x_3, \qquad 2/3x_3 = 4x_4,$$
$$1/3x_4 = 5x_5, \qquad x_0 + x_1 + \cdots + x_5 = 1,$$

ahonnan

$$v_{\mathrm{st}} = (0.3709\ 0.3709\ 0.1854\ 0.0618\ 0.0103\ 0.0007).$$

8. feladat

(d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?

(d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?

Az idő $x_5 = 0.0007$ részében.

8. feladat

(d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?

Az idő $x_5 = 0.0007$ részében.

(e) Átlagosan hány csatárral játszanak?

(d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?

Az idő $x_5 = 0.0007$ részében.

(e) Átlagosan hány csatárral játszanak?

Az ergodtétel alapján hosszú távon átlagosan

$$3 \cdot x_0 + 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 2.916$$

csatárral játszanak.

8. feladat

(f) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad (a 3 napot tekinthetjük $1/10$ hónapnak).

(f) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad (a 3 napot tekinthetjük 1/10 hónapnak).

Rövid távú becslést használunk: $t = 1/10$, és

$$e^{Qt} \approx (I + Qt) =$$

$$= \begin{bmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 8/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/10 & 7/10 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 & 19/30 & 2/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/10 & 17/30 & 1/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

ahonnan ($v(0) = (\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,)$-gyel)

$$v(t) = v(0)e^{Qt} \approx v(0)(I + Qt) = (\,9/10\;\,1/10\;\,0\;\,0\;\,0\;\,0\,),$$

így annak a valószínűsége, hogy 3 nap múlva is minden csatár egészséges, kb. 9/10.

(f) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad (a 3 napot tekinthetjük 1/10 hónapnak).

Rövid távú becslést használunk: $t = 1/10$, és

$$e^{Qt} \approx (I + Qt) =$$

$$= \begin{bmatrix} 9/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/10 & 8/10 & 1/10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/10 & 7/10 & 1/30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/10 & 19/30 & 2/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/10 & 17/30 & 1/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

ahonnan ($v(0) = (\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,)$-gyel)

$$v(t) = v(0)e^{Qt} \approx v(0)(I + Qt) = (\,9/10\;1/10\;0\;0\;0\;0\,),$$

így annak a valószínűsége, hogy 3 nap múlva is minden csatár egészséges, kb. 9/10. (A valódi érték egyébként 0.6117.)

8. feladat

(g) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad. Figyeljünk a megfogalmazásra!

8. feladat

(g) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad. Figyeljünk a megfogalmazásra!

Figyelem, ez *nem* pont a rövidtávú közelítés, csak hasonló. Az, hogy a következő 3 napban végig minden csatár egészséges marad, annak felel meg, hogy a Markov-lánc a 0 állapotból nem csinál átmenetet a következő 3 napban.

8. feladat

(g) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad. Figyeljünk a megfogalmazásra!

Figyelem, ez *nem* pont a rövidtávú közelítés, csak hasonló. Az, hogy a következő 3 napban végig minden csatár egészséges marad, annak felel meg, hogy a Markov-lánc a 0 állapotból nem csinál átmenetet a következő 3 napban.

Ha a 0 állapotból a következő átmenet idejét T-vel jelöljük, akkor $T \sim \mathrm{EXP}(|q_{00}| = 1)$, és a válasz

$$\mathbb{P}(T > 1/10) = 1 - \mathbb{P}(T < 1/10) = 1 - (1 - e^{-1 \cdot 1/10}) \approx 0.905.$$

8. feladat

(g) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad. Figyeljünk a megfogalmazásra!

Figyelem, ez *nem* pont a rövidtávú közelítés, csak hasonló. Az, hogy a következő 3 napban végig minden csatár egészséges marad, annak felel meg, hogy a Markov-lánc a 0 állapotból nem csinál átmenetet a következő 3 napban.

Ha a 0 állapotból a következő átmenet idejét T-vel jelöljük, akkor $T \sim \mathrm{EXP}(|q_{00}| = 1)$, és a válasz

$$\mathbb{P}(T > 1/10) = 1 - \mathbb{P}(T < 1/10) = 1 - (1 - e^{-1 \cdot 1/10}) \approx 0.905.$$

(Egyébként az (f) és (g) kérdésre a válasz elsőrendben megegyezik.)

5. feladat

$X(t)$ és $Y(t)$ párhuzamosan, egymástól függetlenül zajló folytonos idejű Markov-láncok. $X(t)$ állapottere $\{1, 2\}$, $Y(t)$ állapottere $\{a, b, c\}$; a generátoraik:

$$G_X = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad G_Y = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Legyen $Z(t) = (X(t), Y(t))$. Gondoljuk meg, hogy $Z(t)$ is folytonos idejű Markov-lánc. Adjuk meg az állapotokat. Számítsuk ki a stacionárius eloszlást is. Mi a kapcsolat $Z(t)$ stacionárius eloszlása, valamint $X(t)$ és $Y(t)$ stacionárius eloszlása között?

5. feladat

Megoldás. A lehetséges állapotok 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c. Az 1a állapotból a lehetséges átmenetek:

- 1a→1b. Ez történik akkor, ha $Y(t)$-ben a→b átmenet történik, ennek rátája 1;
- 1a→1c szintén 1 rátával;
- 1a→2a ha $X(t)$-ben 1→2 átmenet történik, ennek rátája 1/2.

Összességében a Q_Z generátor

	$1a$	$1b$	$1c$	$2a$	$2b$	$2c$
$1a$	$*$	1	1	$1/2$	0	0
$1b$	1	$*$	0	0	$1/2$	0
$1c$	3	0	$*$	0	0	$1/2$
$2a$	1	0	0	$*$	1	1
$2b$	0	1	0	1	$*$	0
$2c$	0	0	1	3	0	$*$

5. feladat

Q_Z szerkezete a következő. Az $Y(t)$ átmeneteinek megfelelő átmeneteket kiemeltük pirossal, az $X(t)$ átmeneteinek megfelelő átmeneteket pedig kékkel:

	$1a$	$1b$	$1c$	$2a$	$2b$	$2c$
$1a$	$*$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0
$1b$	1	$*$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$1c$	3	0	$*$	0	0	$\frac{1}{2}$
$2a$	1	0	0	$*$	1	1
$2b$	0	1	0	1	$*$	0
$2c$	0	0	1	3	0	$*$

(* az átlós elemeket jelöli.)

5. feladat

Q_Z szerkezete a következő. Az $Y(t)$ átmeneteinek megfelelő átmeneteket kiemeltük pirossal, az $X(t)$ átmeneteinek megfelelő átmeneteket pedig kékkel:

	$1a$	$1b$	$1c$	$2a$	$2b$	$2c$
$1a$	$*$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0
$1b$	1	$*$	0	0	$\frac{1}{2}$	0
$1c$	3	0	$*$	0	0	$\frac{1}{2}$
$2a$	1	0	0	$*$	1	1
$2b$	0	1	0	1	$*$	0
$2c$	0	0	1	3	0	$*$

(* az átlós elemeket jelöli.)

Látható, hogy a piros elemek lényegében Q_Y egy-egy példányát alkotják. A pontos szerkezetet Kronecker-szorzattal lehet megérteni.

5. feladat

Az A és B mátrixok Kronecker-szorzata

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

5. feladat

Az A és B mátrixok Kronecker-szorzata

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

Ilyen jelöléssel a Q_Z mátrix piros része igazából

$$I_2 \otimes Q_Y = \begin{bmatrix} * & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & * \end{bmatrix}.$$

5. feladat

Hasonlóan a kék rész pedig

$$Q_X \otimes I_3 = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & * & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & * \end{bmatrix}$$

és

$$Q_Z = Q_X \otimes I_3 + I_2 \otimes Q_Y.$$

Ez az egyenlet írja le két párhuzamosan, egymástól függetlenül zajló Markov-lánc együttes generátorát. A jobboldalt úgy is nevezik, hogy Q_X és Q_Y Kronecker-összege, jelölése $Q_X \oplus Q_Y$.

5. feladat

A Kronecker-alak öröklődik a $v(t)$ állapotvalószínűség-vektorokra is, egészen pontosan

$$v_Z(0) = v_X(0) \otimes v_Y(0),$$

sőt,

$$v_Z(t) = v_X(t) \otimes v_Y(t) \quad \forall t \geq 0,$$

és végül

$$v_{Z,\mathrm{st}} = v_{X,\mathrm{st}} \otimes v_{Y,\mathrm{st}}$$

is teljesül.

6. feladat

Egy távközlési kábelen három független adatfolyam megy. Az adatfolyamok egyformák; egy adatfolyamnak két állapota van: ON állapotban 1 Mb/s a sebessége, OFF állapotban 0 Mb/s. ON állapotból μ rátával lép át OFF állapotba és OFF állapotból λ rátával lép át ON állapotba. Az adatfolyamok egymástól függetlenek. Jelölje X_t azt, hogy a t időpontban mennyi a három adatfolyam együttes sebessége. Gondoljuk meg, hogy X_t-re teljesül a Markov-tulajdonság, majd írjuk fel a generátorát.

6. feladat

Megoldás.
A három adatfolyam függetlenül, párhuzamosan zajlik, az együttes generátorukat Kronecker-szorzattal lehet megadni. Az együttes állapottér mérete 2^3, és külön-külön minden adatfolyamról tartalmazza azt az információt, hogy éppen ON vagy OFF állapotban van.

6. feladat

Megoldás.
A három adatfolyam függetlenül, párhuzamosan zajlik, az együttes generátorukat Kronecker-szorzattal lehet megadni. Az együttes állapottér mérete 2^3, és külön-külön minden adatfolyamról tartalmazza azt az információt, hogy éppen ON vagy OFF állapotban van.

Azonban amiatt, hogy a három adatfolyam egyforma, igazából mindegy, hogy ha pl. 1 van ON állapotban, az melyik. Emiatt a fenti 8 állapotot össze lehet gyűjteni kevesebb állapotba aszerint, hogy mennyi adatfolyam van ON állapotba. Ekkor már csak 4 lehetséges állapot van: 0, 1, 2, 3. Figyelem! Ha az adatfolyamok különbözőek lennének, akkor ezzel az összegyűjtéssel elveszítenénk a Markov-tulajdonságot! De most nincs gond, X_t-re a Markov-tulajdonság megmarad.

6. feladat

Megoldás. A generátornál figyelni kell arra, hogy pl. a 2 állapotban 2 adatfolyam van, ami kikapcsolhat, és csak 1, ami bekapcsolhat (hasonlóan a 8. feladathoz a sérült csatárokkal). Ennek megfelelően

$$Q = \begin{bmatrix} -3\lambda & 3\lambda & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - 2\lambda & 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu - \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{bmatrix}.$$

6. feladat

A stacionárius eloszlás

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{\mu^3}{(\lambda+\mu)^3} \quad \frac{3\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3} \quad \frac{3\mu\lambda^2}{(\lambda+\mu)^3} \quad \frac{\lambda^3}{(\lambda+\mu)^3} \right),$$

ami egyébként éppen a $\mathrm{BIN}(3, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ eloszlás.

6. feladat

A stacionárius eloszlás

$$v_{\mathrm{st}} = \left(\frac{\mu^3}{(\lambda+\mu)^3} \;\; \frac{3\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3} \;\; \frac{3\mu\lambda^2}{(\lambda+\mu)^3} \;\; \frac{\lambda^3}{(\lambda+\mu)^3} \right),$$

ami egyébként éppen a $\mathrm{BIN}(3, \frac{\lambda}{\lambda+\mu})$ eloszlás.

Egy lehetséges interpretáció a következő: minden egyes adatfolyamnak külön-külön a stacionárius eloszlása $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)$, azaz X_t-ben mindegyik függetlenül, $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel lesz ON állapotban.