Jackson-hálózatok

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/11/19

Vázlat

(1) Laplace-transzformált
(2) Sorbanállási hálózatok
(3) Emlékeztető: Markov-sorok
(4) Kimenő folyamat, Burke-tétel
(5) Jackson-hálózatok
(6) Forgalmi egyenlet, stabilitási feltétel
(7) Stacionárius eloszlás
(8) Zárt hálózatok
(9) Feladatok

Előkészület: Laplace-transzformáció.

Laplace-transzformált

Előkészület: Laplace-transzformáció.

Egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltja

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Egy $X \geq 0$ folytonos valószínűségi változó Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = E\left(e^{-sX}\right) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t,$$

ahol $f(t)$ az X sűrűségfüggvénye. Ha f sűrűségfüggvény, akkor $f^*(s)$ minden $\mathrm{Re}(s) \geq 0$-ra értelmezett.

Laplace-transzformált

Előkészület: Laplace-transzformáció.

Egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltja

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t.$$

Egy $X \geq 0$ folytonos valószínűségi változó Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = E\left(e^{-sX}\right) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t,$$

ahol $f(t)$ az X sűrűségfüggvénye. Ha f sűrűségfüggvény, akkor $f^*(s)$ minden $\mathrm{Re}(s) \geq 0$-ra értelmezett.

Példa. Az $X \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ eloszlás Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \lambda e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)t} \mathrm{d}s = \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Tulajdonságok

Lemma (Teljes várható érték tétel Laplace-transzformáltra)

Ha X, Y, Z *valószínűségi változók* f_X, f_Y, f_Z *sűrűségfüggvénnyel, és*

$$\mathbb{P}(Z = X) = p, \qquad P(Z = Y) = 1 - p,$$

akkor

$$Z^*(s) = pX^*(s) + (1 - p)Y^*(s).$$

Tulajdonságok

Lemma (Teljes várható érték tétel Laplace-transzformáltra)

Ha X, Y, Z valószínűségi változók f_X, f_Y, f_Z sűrűségfüggvénnyel, és

$$\mathbb{P}(Z = X) = p, \qquad P(Z = Y) = 1 - p,$$

akkor

$$Z^*(s) = pX^*(s) + (1-p)Y^*(s).$$

Biz. Teljes valószínűség tétel alapján

$$\begin{aligned} P(Z < t) &= pP(X < t) + (1-p)P(Y < t), \\ f_Z(t) &= pf_X(t) + (1-p)f_y(t), \\ Z^*(s) &= pX^*(s) + (1-p)Y^*(s). \end{aligned}$$

Tulajdonságok

További fontos tulajdonsága, hogy konvolúcióból (független összegből) szorzatot csinál.

Lemma

Ha X, Y valószínűségi változók függetlenek, és

$$Z = X + Y,$$

akkor

$$Z^*(s) = X^*(s) \cdot Y^*(s).$$

További fontos tulajdonsága, hogy konvolúcióból (független összegből) szorzatot csinál.

Lemma

Ha X, Y valószínűségi változók függetlenek, és

$$Z = X + Y,$$

akkor

$$Z^*(s) = X^*(s) \cdot Y^*(s).$$

1. biz. Az $X^*(s) = E\left(e^{-sX}\right)$ alak alapján; ha X és Y függetlenek, akkor e^{-sX} és e^{-sY} is függetlenek, és

$$\underbrace{E\left(e^{-s(X+Y)}\right)}_{Z^*(s)} = E\left(e^{-sX}e^{-sY}\right) = \underbrace{E\left(e^{-sX}\right)}_{X^*(s)}\underbrace{E\left(e^{-sY}\right)}_{Y^*(s)}.$$

Tulajdonságok

2. biz. Ha $Z = X + Y$, akkor

$$f_Z(t) = \int_0^t f_Y(u) f_X(t-u) \mathrm{d}u,$$

2. biz. Ha $Z = X + Y$, akkor

$$f_Z(t) = \int_0^t f_Y(u) f_X(t-u) \mathrm{d}u,$$

és

$$f_Z^*(s) = \int_0^\infty f_Z(t) e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\int_0^t f_Y(u) f_X(t-u) \mathrm{d}u \right) e^{-st} \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\infty \int_u^\infty f_Y(u) f_X(t-u) e^{-st} \mathrm{d}t \mathrm{d}u.$$

2. biz. Ha $Z = X + Y$, akkor

$$f_Z(t) = \int_0^t f_Y(u) f_X(t-u) \mathrm{d}u,$$

és

$$f_Z^*(s) = \int_0^\infty f_Z(t) e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^\infty \left(\int_0^t f_Y(u) f_X(t-u) \mathrm{d}u \right) e^{-st} \mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\infty \int_u^\infty f_Y(u) f_X(t-u) e^{-st} \mathrm{d}t \mathrm{d}u.$$

$v = t - u$ változócserével

$$f_Z^*(s) = \int_0^\infty \int_u^\infty f_Y(u) f_X(t-u) e^{-st} \mathrm{d}t \mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty f_Y(u) f_X(v) e^{-s(v+u)} \mathrm{d}v \mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^\infty f_Y(u) e^{-su} \mathrm{d}u \cdot \int_0^\infty f_X(v) e^{-sv} \mathrm{d}v = f_Y^*(S) \cdot f_X^*(S).$$

Tulajdonságok

Tétel.

Legyen $F(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$. *Ekkor*

$$F^*(s) = \frac{f^*(s)}{s}, \qquad (f')^*(s) = sf^*(s).$$

Tétel.

Legyen $F(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$. *Ekkor*

$$F^*(s) = \frac{f^*(s)}{s}, \qquad (f')^*(s) = sf^*(s).$$

(Ha F eloszlásfüggvény, akkor $F^*(s)$ minden $\mathrm{Re}(s) > 0$-ra értelmezett.)

Tulajdonságok

Tétel.

Legyen $F(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$. *Ekkor*

$$F^*(s) = \frac{f^*(s)}{s}, \qquad (f')^*(s) = sf^*(s).$$

(Ha F eloszlásfüggvény, akkor $F^*(s)$ minden $\mathrm{Re}(s) > 0$-ra értelmezett.)

Biz. Parciális integrálással ($\int u'v = uv - \int uv'$):

$$\begin{aligned}
F^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\mathrm{d}t = \\
&= \left[\left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} F(t) \right]_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} f(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\mathrm{d}t = \frac{f^*(s)}{s}.
\end{aligned}$$

Inverz Laplace-transzformáció

Ha egy eloszlást ki tudunk számítani Laplace-transzformált tartományban, akkor a végén még vissza kell transzformálnunk.

Inverz Laplace-transzformáció

Ha egy eloszlást ki tudunk számítani Laplace-transzformált tartományban, akkor a végén még vissza kell transzformálnunk.

Bizonyos szép/egyszerűbb függvényekre meg lehet adni az inverz Laplace-transzformáltat analitikusan. Például az összes racionális törtfüggvényre ($\frac{p(s)}{q(s)}$, ahol p és q polinomok) ki lehet számítani parciális törtekre bontással.

Inverz Laplace-transzformáció

Ha egy eloszlást ki tudunk számítani Laplace-transzformált tartományban, akkor a végén még vissza kell transzformálnunk.

Bizonyos szép/egyszerűbb függvényekre meg lehet adni az inverz Laplace-transzformáltat analitikusan. Például az összes racionális törtfüggvényre ($\frac{p(s)}{q(s)}$, ahol p és q polinomok) ki lehet számítani parciális törtekre bontással.

Bonyolultabb függvényekre általában numerikusan invertáljuk. Ehhez ajánlom:

http://inverselaplace.org/

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;
- egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;
- egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Egy hálózat lehet *nyílt*, ilyenkor érkezhetnek új igények a rendszerbe, illetve igények távozhatnak is a rendszerből.

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;
- egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Egy hálózat lehet *nyílt*, ilyenkor érkezhetnek új igények a rendszerbe, illetve igények távozhatnak is a rendszerből.

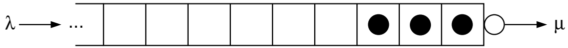
A másik lehetőség a *zárt* hálózat, ilyenkor nincsenek a rendszerből távozó és érkező igények, hanem a bent lévő igények száma állandó.

Tipikus kérdések:

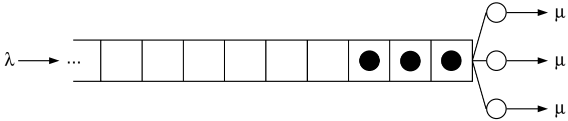
- stabilitás feltétele az egész rendszerre;
- a rendszer stacionárius állapota;
- az egyes csomóponti szerverek kihasználtsága;
- átlagos késleltetés az egyes csomópontoknál és az egész rendszerre;
- rendszerben töltött idő eloszlása.

Emlékeztető. M/M/1 sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.

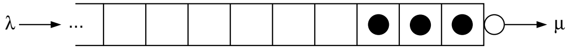
Emlékeztető. M/M/1 sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.



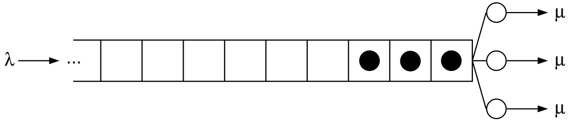
Az M/M/c sorban c szerver (kiszolgáló egység) van és végtelen buffer:



Emlékeztető. M/M/1 sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.



Az M/M/c sorban c szerver (kiszolgáló egység) van és végtelen buffer:



Az M/M/∞ sorban minden igény azonnal elkezd fix μ rátájú kiszolgálást kapni. (A gyakorlatban ez annak felel meg, amikor egy M/M/c sorban c értéke extrém nagy.)

Tétel.

(a) *Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO$(1 - \rho)$.*

Tétel.

(a) *Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$.*

(b) *Egy M/M/c sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$, és a stacionárius eloszlása*

$$x_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1},$$

$$x_k = \begin{cases} x_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & \text{ha } 0 < k \le c-1, \\ x_0 \frac{c^c \rho^k}{c!} & \text{ha } k \ge c. \end{cases}$$

M/M/1, M/M/c és M/M/∞ sor

Tétel.

(a) *Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$.*

(b) *Egy M/M/c sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$, és a stacionárius eloszlása*

$$x_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1},$$

$$x_k = \begin{cases} x_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & \text{ha } 0 < k \leq c-1, \\ x_0 \frac{c^c \rho^k}{c!} & \text{ha } k \geq c. \end{cases}$$

(c) *Egy M/M/∞ sor mindig stabil, és a stacionárius eloszlása POI(λ/μ).*

Biz.

(a) Már volt.

Biz.

(a) Már volt.

(b) Az (a)-hoz hasonlóan a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik:

$$\lambda x_k = \mu_{k+1} x_{k+1},$$

ahol

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu & \text{ha } k \geq c; \end{cases}$$

Biz.

(a) Már volt.

(b) Az (a)-hoz hasonlóan a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik:

$$\lambda x_k = \mu_{k+1} x_{k+1},$$

ahol

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu & \text{ha } k \geq c; \end{cases}$$

innen

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} k\mu/\lambda & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu/\lambda & \text{ha } k \geq c, \end{cases}$$

amit már csak rendezni és normálni kell.

Biz.

(a) Már volt.

(b) Az (a)-hoz hasonlóan a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik:

$$\lambda x_k = \mu_{k+1} x_{k+1},$$

ahol

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{ha } k \le c-1, \\ c\mu & \text{ha } k \ge c; \end{cases}$$

innen

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} k\mu/\lambda & \text{ha } k \le c-1, \\ c\mu/\lambda & \text{ha } k \ge c, \end{cases}$$

amit már csak rendezni és normálni kell.

(c) (b) rész x_k képlete, csak most nincs $k \ge c$ eset.

Kimenő folyamat

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Kimenő folyamat

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Megjegyzés. A kimenő folyamatban nem játszik szerepet a szerver kiszolgálási rátája. (Illetve annyiban igen, hogy a feltételek között szerepel, hogy a sor stabil.)

Kimenő folyamat

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Megjegyzés. A kimenő folyamatban nem játszik szerepet a szerver kiszolgálási rátája. (Illetve annyiban igen, hogy a feltételek között szerepel, hogy a sor stabil.)

Biz. (M/M/1 sorra, vázlat.)

Laplace-transzformáltak segítségével kiszámítjuk a távozási időközök eloszlását.

Kimenő folyamat

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy M/M/1, M/M/c vagy M/M/∞ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Megjegyzés. A kimenő folyamatban nem játszik szerepet a szerver kiszolgálási rátája. (Illetve annyiban igen, hogy a feltételek között szerepel, hogy a sor stabil.)

Biz. (M/M/1 sorra, vázlat.)

Laplace-transzformáltak segítségével kiszámítjuk a távozási időközök eloszlását.

Emlékeztető: a sorhossz stacionárius eloszlása PGEO$(1-\rho)$ $\rightarrow$ a sor ρ valószínűséggel nem üres.

Aszerint bontunk két esetre, hogy üres-e a sor:

- ρ valószínűséggel a sor nem üres, ekkor a következő távozásig $\mathrm{EXP}(\mu)$ időt kell várni, aminek Laplace-transzformáltja $\frac{\mu}{\mu+s}$;

Kimenő folyamat

Aszerint bontunk két esetre, hogy üres-e a sor:

- ρ valószínűséggel a sor nem üres, ekkor a következő távozásig $\mathrm{EXP}(\mu)$ időt kell várni, aminek Laplace-transzformáltja $\frac{\mu}{\mu+s}$;
- $1-\rho$ valószínűséggel a sor üres, ekkor először meg kell várni egy érkezést ($\mathrm{EXP}(\lambda)$ idő), aztán annak a távozását ($\mathrm{EXP}(\mu)$ idő) $\rightarrow$ a Laplace-transzformált $\frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s}$.

Kimenő folyamat

Aszerint bontunk két esetre, hogy üres-e a sor:

- ρ valószínűséggel a sor nem üres, ekkor a következő távozásig EXP(μ) időt kell várni, aminek Laplace-transzformáltja $\frac{\mu}{\mu+s}$;
- $1-\rho$ valószínűséggel a sor üres, ekkor először meg kell várni egy érkezést (EXP(λ) idő), aztán annak a távozását (EXP(μ) idő) $\to$ a Laplace-transzformált $\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s}$.

Ez alapján a D távozási időköz Laplace-transzformáltja

$$D^*(s) = \rho\frac{\mu}{\mu+s} + (1-\rho)\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s} =$$
$$\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\mu}{\mu+s} + \frac{\mu-\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s} = \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

Kimenő folyamat

Aszerint bontunk két esetre, hogy üres-e a sor:

- ρ valószínűséggel a sor nem üres, ekkor a következő távozásig EXP(μ) időt kell várni, aminek Laplace-transzformáltja $\frac{\mu}{\mu+s}$;
- $1-\rho$ valószínűséggel a sor üres, ekkor először meg kell várni egy érkezést (EXP(λ) idő), aztán annak a távozását (EXP(μ) idő) $\rightarrow$ a Laplace-transzformált $\frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s}$.

Ez alapján a D távozási időköz Laplace-transzformáltja

$$D^*(s) = \rho\frac{\mu}{\mu+s} + (1-\rho)\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s} =$$
$$\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\mu}{\mu+s} + \frac{\mu-\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda}{\lambda+s}\cdot\frac{\mu}{\mu+s} = \frac{\lambda}{\lambda+s}.$$

(Távozási időközök függetlenségét nem biz.)

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- az i-edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző szerverekhez függetlenül);

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- az i-edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző szerverekhez függetlenül);
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába, illetve $1 - \sum_{j=1}^{m} P_{ij}$ valószínűséggel távozik a rendszerből.

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

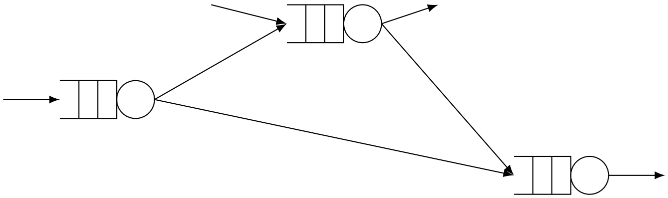
- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- az i-edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző szerverekhez függetlenül);
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába, illetve $1 - \sum_{j=1}^{m} P_{ij}$ valószínűséggel távozik a rendszerből.

A P ún. *irányítási mátrix* tulajdonságai:

- $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \ldots, m,$
- $\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, m$-re, és legalább egy i-re $<$ áll.

Az ilyen tulajdonságú mátrixokat szubsztochasztikus mátrixoknak hívjuk.

A nyílt Jackson-hálózatokon belül egy hálózat aciklikus, ha a szerverek sorba rendezhetőek úgy, hogy a szerverek között mindig csak előre felé van forgalom (vagyis nincs visszacsatolás).



Ilyenkor $i > j$-re $P_{ij} = 0$, azaz P felső-háromszög mátrix.

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Ha valamelyik szerver érkezési folyamata egy λ_i paraméterű Poisson-folyamat, akkor a Burke-tétel szerint a kimenő folyamata is az, ami aztán a ritkítás tétel miatt (kisebb paraméterű) Poisson-folyamatokra oszlik és járul hozzá a későbbi szerverek érkezési folyamatához.

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Ha valamelyik szerver érkezési folyamata egy λ_i paraméterű Poisson-folyamat, akkor a Burke-tétel szerint a kimenő folyamata is az, ami aztán a ritkítás tétel miatt (kisebb paraméterű) Poisson-folyamatokra oszlik és járul hozzá a későbbi szerverek érkezési folyamatához.

Mivel a hálózat aciklikus, ezért bármelyik szerver bemenetén független Poisson-folyamatok adódnak, így az unió tétel miatt a későbbi szerverek bemenete is Poisson-folyamat.

Forgalmi egyenlet

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i-edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j P_{ji}.$$

Forgalmi egyenlet

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i-edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j P_{ji}.$$

Ez a λ_i-kre egy lineáris egyenletrendszer, ami sorban előre haladva expliciten megoldható.

Forgalmi egyenlet

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i-edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j P_{ji}.$$

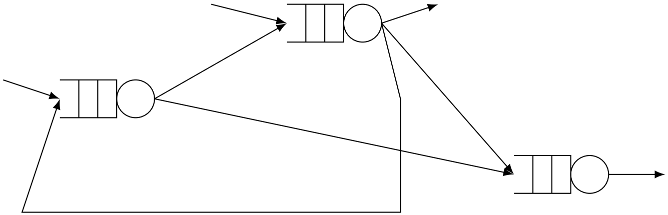
Ez a λ_i-kre egy lineáris egyenletrendszer, ami sorban előre haladva expliciten megoldható.

Tétel.

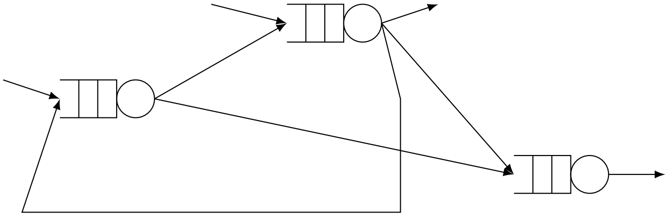
A teljes rendszer pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_i < \mu_i \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Olyan nyílt Jackson-hálózatokra, amikben van visszacsatolás, az egyes szerverek bemenetén találkozó folyamatok függetlensége sérülhet.



Olyan nyílt Jackson-hálózatokra, amikben van visszacsatolás, az egyes szerverek bemenetén találkozó folyamatok függetlensége sérülhet.



Emiatt a bemeneteken már nem feltétlenül lesznek Poisson-folyamatok. Ezzel együtt a hosszú távú átlagos érkezési rátáról van értelme beszélni, és azzal hasonlóan lehet számolni, mint a Poisson-folyamat paraméterével.

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i, ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i, ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

A külső érkezéseket is figyelembe véve ez ismét csak összefoglalható egy egyenletbe:

Tétel. (Forgalmi egyenlet)

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{ji}.$$

Forgalmi egyenlet

Azt mondjuk, hogy az i-edik szerver érkezési rátája λ_i, ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i, ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

A külső érkezéseket is figyelembe véve ez ismét csak összefoglalható egy egyenletbe:

Tétel. (Forgalmi egyenlet)

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_{ji}.$$

Tétel. (Stabilitás feltétele)

Egy nyílt Jackson-hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_i < \mu_i \quad \forall i = 1, \ldots, m.$$

Forgalmi egyenlet

Mátrix-vektor alakban a forgalmi egyenlet

$$\lambda(I - P) = \gamma;$$

Ha $I - P$ invertálható (ehhez elégséges, ha minden szerverből a forgalom egy része előbb-utóbb távozik a rendszerből), akkor a megoldás

$$\lambda = \gamma(I - P)^{-1}.$$

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I-P)^{-1}]_{i,j}$$

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I - P)^{-1}]_{i,j}$$

Biz. Az i-edik szerverből indulva a j-edik szerverbe való látogatások számának várható értéke teljes várható érték tétel alapján

$$E(L_{i,j}) = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{m} P_{ik} E(L_{k,j}),$$

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j-edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i-edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I - P)^{-1}]_{i,j}$$

Biz. Az i-edik szerverből indulva a j-edik szerverbe való látogatások számának várható értéke teljes várható érték tétel alapján

$$E(L_{i,j}) = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^{m} P_{ik} E(L_{k,j}),$$

ami mátrix alakban írva

$$E(L) = I + P \cdot E(L),$$

aminek a megoldása éppen

$$E(L) = (I - P)^{-1}.$$

Stacionárius eloszlás

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \dots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i-edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \dots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Stacionárius eloszlás

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \ldots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i-edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \ldots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha a hálózat stabil, akkor pontosan egy stacionárius eloszlás létezik, és a hálózat bármilyen kezdeti értékből indítva a stacionárius eloszláshoz konvergál.

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \ldots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i-edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \ldots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha a hálózat stabil, akkor pontosan egy stacionárius eloszlás létezik, és a hálózat bármilyen kezdeti értékből indítva a stacionárius eloszláshoz konvergál.

Tétel. (Jackson)

Ha egy stabil nyílt Jackson-hálózatban az i-edik szerver terhelése $\rho_i = \lambda_i/\mu_i < 1$, akkor a rendszer stacionárius eloszlása

$$v_{st}(k_1, \ldots, k_m) = \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{k_i}(1 - \rho_i).$$

Biz. (vázlat) Ellenőrizzük, hogy a megadott eloszlás teljesíti a stacionárius eloszlás definícióját.

Legyenek

- $K = (k_1, \dots, k_m)$,
- $K_{i+} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$;
- $K_{i \to j} = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j + 1, \dots, k_m)$;
- $K_{i-} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$.

Stacionárius eloszlás

Biz. (vázlat) Ellenőrizzük, hogy a megadott eloszlás teljesíti a stacionárius eloszlás definícióját.

Legyenek

- $K = (k_1, \dots, k_m)$,
- $K_{i+} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$;
- $K_{i \to j} = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j + 1, \dots, k_m)$;
- $K_{i-} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$.

Az egyes átmenetek jelentése:

- $K \to K_{i+}$: külső érkezés történt az i-edik szerverbe (ennek a rátája γ_i);
- $K \to K_{i \to j}$: kiszolgálás történt az i-edik szerverben és az igény továbbment a j-edik szerverbe (ennek a rátája $P_{ij}\mu_i$).
- $K \to K_{i-}$: kiszolgálás történt az i-edik szerverben és az igény távozott a rendszerből (ennek a rátája $(1 - \sum_j P_{ij})\mu_i$).

Stacionárius eloszlás

Az előbbi jelölésekkel a stacionárius eloszlás egyenletei

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} P_{ji} \mu_j v_{\mathrm{st}}(K_{i \to j}) + \mu_i \left(1 - \sum_j P_{ij} \right) v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) + \right.$$

$$\left. 1\{k_i > 0\} \gamma_i v_{\mathrm{st}}(K_{i-}) + \mu_i v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) - v_{\mathrm{st}}(K) \left(\gamma_i + \mu_i + \sum_{j \neq i} P_{ij} \mu_i \right) \right) = 0$$

minden lehetséges K-ra.

Stacionárius eloszlás

Az előbbi jelölésekkel a stacionárius eloszlás egyenletei

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} P_{ji}\mu_j v_{\text{st}}(K_{i \to j}) + \mu_i \left(1 - \sum_j P_{ij}\right) v_{\text{st}}(K_{i+}) + \right.$$

$$\left. 1\{k_i > 0\}\gamma_i v_{\text{st}}(K_{i-}) + \mu_i v_{\text{st}}(K_{i+}) - v_{\text{st}}(K) \left(\gamma_i + \mu_i + \sum_{j \neq i} P_{ij}\mu_i\right)\right) = 0$$

minden lehetséges K-ra.

A fenti egyenletbe behelyettesítve $v_{\text{st}}(K) = \prod_{i=1}^m \rho_i^{k_i}(1 - \rho_i)$-t, a szorzat alak miatt a legtöbb tényező kiemelhető minden tagból, és a visszamaradó tagok összege éppen a forgalmi egyenletet adja (0-ra rendezve).

Stacionárius eloszlás

Az előbbi jelölésekkel a stacionárius eloszlás egyenletei

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} P_{ji}\mu_j v_{\mathrm{st}}(K_{i\to j}) + \mu_i \left(1 - \sum_j P_{ij}\right) v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) + \right.$$

$$\left. 1\{k_i > 0\}\gamma_i v_{\mathrm{st}}(K_{i-}) + \mu_i v_{\mathrm{st}}(K_{i+}) - v_{\mathrm{st}}(K) \left(\gamma_i + \mu_i + \sum_{j \neq i} P_{ij}\mu_i\right)\right) = 0$$

minden lehetséges K-ra.

A fenti egyenletbe behelyettesítve $v_{\mathrm{st}}(K) = \prod_{i=1}^{m} \rho_i^{k_i}(1-\rho_i)$-t, a szorzat alak miatt a legtöbb tényező kiemelhető minden tagból, és a visszamaradó tagok összege éppen a forgalmi egyenletet adja (0-ra rendezve).

A Jackson-tétel szerint a rendszer stacionárius eloszlása *szorzat alakú*: egybeesik azzal, mintha a sorok független, ρ_i terhelésű M/M/1 sorok lennének.

Mit lát egy beérkező igény?

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Mit lát egy beérkező igény?

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Ez igaz nyílt Jackson-hálózatokra is.

Tétel.

Bármely igénynek bármely sorba való érkezésekor a látott (beérkezési pillanat előtti) sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Bármely igény rendszerből való távozásakor a távozás utáni pillanatban látott sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Mit lát egy beérkező igény?

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Ez igaz nyílt Jackson-hálózatokra is.

Tétel.

Bármely igénynek bármely sorba való érkezésekor a látott (beérkezési pillanat előtti) sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Bármely igény rendszerből való távozásakor a távozás utáni pillanatban látott sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Nem biz.

Tétel. (Átlagos rendszerben töltött idő)

Ha egy igény beáll az i-edik sorba, akkor onnantól a rendszerből való távozásig szükséges idő várható értéke

$$\sum_{j=1}^{m}[(I-P)^{-1}]_{i,j}\frac{1}{\mu_j-\lambda_j}.$$

Tétel. (Átlagos rendszerben töltött idő)

Ha egy igény beáll az i-edik sorba, akkor onnantól a rendszerből való távozásig szükséges idő várható értéke

$$\sum_{j=1}^{m}[(I-P)^{-1}]_{i,j}\frac{1}{\mu_j-\lambda_j}.$$

Biz. Aszerint számoljuk össze, hogy melyik sorba hányszor állt be, és ott mennyi időt töltött.

M/M/c és M/M/∞ szerverek

Megjegyzések. Ha a hálózatban nemcsak M/M/1 szerverek vannak, hanem M/M/c vagy M/M/∞ szerverek is, attól még működik minden:

- a forgalmi egyenlet érvényes marad,
- a stabilitás feltétele is ugyanúgy az, hogy minden egyes sor stabil legyen,
- a hálózat stacionárius eloszlása is szorzat alakú, a megfelelő terhelésű sorok stacionárius eloszlásának szorzata,
- az átlagos rendszerben töltött idő képlete is hasonló alakú, csak az $1/(\mu_j - \lambda_j)$ helyett bonyolultabb tagokkal.

M/M/c és M/M/∞ szerverek

Megjegyzések. Ha a hálózatban nemcsak M/M/1 szerverek vannak, hanem M/M/c vagy M/M/∞ szerverek is, attól még működik minden:

- a forgalmi egyenlet érvényes marad,
- a stabilitás feltétele is ugyanúgy az, hogy minden egyes sor stabil legyen,
- a hálózat stacionárius eloszlása is szorzat alakú, a megfelelő terhelésű sorok stacionárius eloszlásának szorzata,
- az átlagos rendszerben töltött idő képlete is hasonló alakú, csak az $1/(\mu_j - \lambda_j)$ helyett bonyolultabb tagokkal.

A Jackson-tételből viszont nem következik, hogy az egyes sorok érkezési folyamata független. Ha a hálózatban van visszacsatolás, akkor az egyes sorok érkezési folyamata nem független. De a stacionárius eloszlás ilyenkor is szorzat alakú.

Zárt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;

Zárt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába.

Ezúttal feltesszük, hogy nincsenek sem érkező igények, sem távozó igények, a rendszerben lévő igények száma állandó.

Zárt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i-edik szerver kiszolgálási rátája μ_i;
- ha az i-edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j-edik szerver sorába.

Ezúttal feltesszük, hogy nincsenek sem érkező igények, sem távozó igények, a rendszerben lévő igények száma állandó.

Ilyenkor

$$\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1,$$

az irányítási mátrix sztochasztikus.

Zárt Jackson-hálózatok

Zárt Jackson-hálózatokra nem kell stabilitást vizsgálni.

Zárt Jackson-hálózatok

Zárt Jackson-hálózatokra nem kell stabilitást vizsgálni.

A forgalmi egyenletben nincs külső érkezés:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ji}\lambda_j.$$

Ilyenkor a megoldás csak konstans szorzó erejéig egyértelmű; a normalizálás a rendszerben keringő igények számából jön majd.

Jelölje a rendszerben lévő igények (fix) számát K.

Zárt Jackson-hálózatok

Tétel. (Gordon–Newell)

A stacionárius eloszlás

$$v_{st}(k_1, \ldots, k_m) = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i},$$

ahol λ_i-k teljesítik a forgalmi egyenletet, és

$$\sum_{\substack{(k_1, \ldots, k_m): \\ k_1 + \cdots + k_m = K}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i} = 1.$$

(Ezzel az egyenlettel a λ_i-k már egyértelműen meghatározottak.)

Tétel. (Gordon–Newell)

A stacionárius eloszlás

$$v_{st}(k_1,\dots,k_m)=\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i},$$

ahol λ_i-k teljesítik a forgalmi egyenletet, és

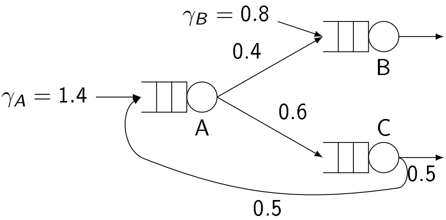
$$\sum_{\substack{(k_1,\dots,k_m):\\ k_1+\dots+k_m=K}}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i}=1.$$

(Ezzel az egyenlettel a λ_i-k már egyértelműen meghatározottak.)

Biz. Ugyanúgy csak ellenőrizni kell a stacionárius eloszlás egyenleteit, mint nyílt hálózatokra.

1. feladat

Az alábbi hálózatban mindhárom szerver FIFO, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_A = 2.5, \mu_B = 1.7, \mu_C = 1.5$.



(a) Stabil-e a hálózat?

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

(d) Mi a rendszer stacionárius eloszlása?

(a) Stabil-e a hálózat?

1. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. A P irányítási mátrix a következő:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. A P irányítási mátrix a következő:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$\gamma = (\gamma_A \ \gamma_B \ \gamma_C) = (1.4 \ 0.8 \ 0), \quad \lambda = (\lambda_A \ \lambda_B \ \lambda_C).$$

Az egyes szerverek érkezési rátáját a forgalmi egyenletből tudjuk kiszámítani:

$$\lambda(I - P) = \gamma.$$

1. feladat

(a) A forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = (2.0\ 1.6\ 1.2),$$

1. feladat

(a) A forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = (2.0\ 1.6\ 1.2),$$

így

$$\lambda_A = 2.0 < \mu_A = 2.5,$$
$$\lambda_B = 1.6 < \mu_B = 1.7,$$
$$\lambda_C = 1.2 < \mu_C = 1.5$$

mind teljesül, a rendszer stabil.

1. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A/\mu_A = 0.800,$$
$$\rho_B = \lambda_B/\mu_B = 0.941,$$
$$\rho_C = \lambda_C/\mu_C = 0.800.$$

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

$$\sum_{j=1}^{m} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

$$\sum_{j=1}^{m} [(I - P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

(d) A rendszer stacionárius eloszlása

(c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

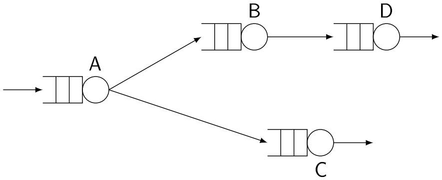
és

$$\sum_{j=1}^{m} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

(d) A rendszer stacionárius eloszlása

$$v_{\mathrm{st}}(k_A, k_B, k_C) = (1-\rho_A)\rho_A^{k_A}(1-\rho_B)\rho_B^{k_B}(1-\rho_C)\rho_C^{k_C} =$$
$$= 0.00235 \cdot 0.8^{k_A+k_C} \cdot 0.941^{k_B}.$$

Az alábbi hálózatban minden szerver M/M/1 típusú, az egyes szerverek kiszolgálási rátája rendre $\mu_A = 6.0, \mu_B = 2.0$, $\mu_C = 4.0, \mu_D = 3.0$. A kívülről történő érkezések rátája $\gamma_A = 2.5$. Az A szerverből kimenő igények p valószínűséggel a B, $1 - p$ valószínűséggel a C szerver sorába állnak be.



(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

(d) A p paraméter mely értékére lesz az átlagos rendszerben töltött idő minimális?

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

Megoldás. Ez egy aciklikus hálózat, az irányítási mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

Megoldás. Ez egy aciklikus hálózat, az irányítási mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A forgalmi egyenlet megoldható expliciten:

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \gamma_A = 2.5, \\ \lambda_B &= p\lambda_A = 2.5p, \\ \lambda_C &= (1-p)\lambda_A = 2.5(1-p), \\ \lambda_D &= \lambda_C = 2.5(1-p). \end{aligned}$$

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\begin{aligned} \lambda_A = 2.5 &< \mu_A = 6.0, \\ \lambda_B = 2.5p &< \mu_B = 2.0, \\ \lambda_C = 2.5(1-p) &< \mu_C = 4.0, \\ \lambda_D = 2.5p &< \mu_D = 3.0 \end{aligned}$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesüljön.

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_A = 2.5 < \mu_A = 6.0,$$
$$\lambda_B = 2.5p < \mu_B = 2.0,$$
$$\lambda_C = 2.5(1-p) < \mu_C = 4.0,$$
$$\lambda_D = 2.5p < \mu_D = 3.0$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \le p < 0.8$$

kell teljesüljön.

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\begin{aligned}
\lambda_A = 2.5 &< \mu_A = 6.0, \\
\lambda_B = 2.5p &< \mu_B = 2.0, \\
\lambda_C = 2.5(1-p) &< \mu_C = 4.0, \\
\lambda_D = 2.5p &< \mu_D = 3.0
\end{aligned}$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesüljön.

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

Megoldás. Aciklikus hálózatban ha a külső érkezési folyamatok független Poisson-pontfolyamatok, akkor az egyes szerverek érkezési folyamata is Poisson-folyamat, így a D szerver érkezési folyamata PPP($2.5p$).

2. feladat

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p & 1-p & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és

$$\sum_{j=1}^{4} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} =$$

$$0.2857 + \frac{1-p}{4-2.5(1-p)} + \frac{p}{2-2.5p} + \frac{p}{3-2.5p}.$$

2. feladat

(c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

Megoldás.

$$(I-P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p & 1-p & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

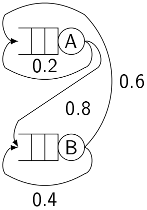
és

$$\sum_{j=1}^{4} [(I-P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} =$$

$$0.2857 + \frac{1-p}{4-2.5(1-p)} + \frac{p}{2-2.5p} + \frac{p}{3-2.5p}.$$

(d) Az előbbi függvény a $p \in [0, 0.8)$ intervallumon a minimumát $p = 0.141$-nél veszi fel.

Az alábbi zárt hálózatban két igény kering. Az A szerver M/M/1, kiszolgálási rátája $\mu_A = 1.0$, a B szerver szintén M/M/1 típusú, $\mu_B = 2.0$.



(a) Mik a lehetséges állapotok?

(b) Írjuk fel a teljes rendszer generátorát, és az alapján számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

(c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást a Gordon-Newell tétel alapján.

(d) Adjuk meg az egyes szerverek terheltségét.

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- (20): az A szerverben van mindkét igény;
- (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- (02): a B szerverben van mindkét igény.

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- (20): az A szerverben van mindkét igény;
- (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- (02): a B szerverben van mindkét igény.

(b) A (20)$\rightarrow$(11) átmenet rátája $1.0 \cdot 0.8$, mivel ilyen átmenet akkor történik, ha az A szerver kiszolgálja a bent lévő két igény közül az elsőt (ennek rátája 1.0), ÉS az a B szerverbe kerül át (ennek valószínűsége 0.8).

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- (20): az A szerverben van mindkét igény;
- (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- (02): a B szerverben van mindkét igény.

(b) A (20)→(11) átmenet rátája $1.0 \cdot 0.8$, mivel ilyen átmenet akkor történik, ha az A szerver kiszolgálja a bent lévő két igény közül az elsőt (ennek rátája 1.0), ÉS az a B szerverbe kerül át (ennek valószínűsége 0.8). Hasonlóan a többi átmenetráta:

- (20)→(11) rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- (11)→(20) rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$;
- (11)→(02) rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- (20)→(11) rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$.

(b) A teljes rendszer mint Markov-lánc generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 & 0 \\ 1.2 & -2 & 0.8 \\ 0 & 1.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

az ehhez tartozó stacionárius eloszlás pedig

$$v_{\mathrm{st}} = (0.4737\ 0.3158\ 0.2105).$$

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

és a forgalmi egyenlet:

$$\lambda_A = 0.2\lambda_A + 0.6\lambda_B$$
$$\lambda_B = 0.8\lambda_A + 0.4\lambda_B,$$

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

és a forgalmi egyenlet:

$$\lambda_A = 0.2\lambda_A + 0.6\lambda_B$$
$$\lambda_B = 0.8\lambda_A + 0.4\lambda_B,$$

ahonnan

$$\lambda_A = 3c, \quad \lambda_B = 4c$$

valamely $c > 0$ konstanssal.

(c) A Gordon–Newell tétel szerint c értékét onnan kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_m):\\ k_1+\cdots+k_m=K}} \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i} = 1,$$

ami itt

$$\left(\frac{3c}{1.0}\right)^2 + \left(\frac{3c}{1.0}\right)\left(\frac{4c}{2.0}\right) + \left(\frac{4c}{2.0}\right)^2 = 1,$$

ahonnan $c = 0.2294$, és így

$$\lambda_A = 3c = 0.6882, \quad \lambda_B = 4c = 0.9177.$$

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{st}}(2,0) &= \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^2 = 0.4737, \\
v_{\mathrm{st}}(1,1) &= \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)\left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right) = 0.3158, \\
v_{\mathrm{st}}(0,2) &= \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^2 = 0.2105,
\end{aligned}
$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$v_{st}(2,0) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^2 = 0.4737,$$
$$v_{st}(1,1) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)\left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right) = 0.3158,$$
$$v_{st}(0,2) = \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^2 = 0.2105,$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

(d) Az egyes szerverek terhelése (kihasználtsága)

3. feladat

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$v_{\mathrm{st}}(2,0) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)^2 = 0.4737,$$

$$v_{\mathrm{st}}(1,1) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A}\right)\left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right) = 0.3158,$$

$$v_{\mathrm{st}}(0,2) = \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B}\right)^2 = 0.2105,$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

(d) Az egyes szerverek terhelése (kihasználtsága)

$$\rho_A = \lambda_A/\mu_A = 0.6882/1.0 = 0.6882,$$

$$\rho_B = \lambda_B/\mu_B = 0.4588/1.0 = 0.4588.$$