Sztochasztika

1. feladatsor - Valószínűségszámítás alapok

2024. ősz

1. Két szabályos kockát feldobunk. Jelölje E_1 azt az eseményt, hogy a kockákon az összeg 6 és jelölje F azt az eseményt, hogy az első kockán 4-es jött ki. Mutassuk meg, hogy E_1 és F nem függetlenek. Legyen E_2 az az esemény, hogy a kockákon az összeg 7. E_2 független-e F-től?

2. Pistike és Móricka a következő játékot játsszák: van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockájuk, melyek közül az egyik szabályos, azaz $\frac{1}{6} - \frac{1}{6}$ valószínűséggel lesz felül az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok bármelyike, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, a 2–5 számoknak $\frac{1}{0.12} - \frac{1}{0.12}$, az 1-esnek 0.02. Találomra elveszi az egyik kockát Pistike, a másikat Móricka, majd elkezdenek dobálni.

   (a) Mekkora a valószínűsége, hogy Pistike első két dobása 6-os?

   (b) Mekkora valószínűséggel választotta Pistike a cinkelt kockát, feltéve, hogy az első két dobása 6-os lett?

3. Egy céllövöldében hat puska van. Közülük három olyan, hogy azokkal 0,5 valószínűséggel találunk célba, eggyel a találati valószínűség 0,7, kettővel pedig 0,8. Találomra kiválasztunk egy puskát, majd lövünk. Mekkora a valószínűsége, hogy célbatalálunk? Mekkora a valószínűsége, hogy 0,8-as puskát választottunk, feltéve, hogy a lövésünk talált?

4. Egy bányász eltévedt a bányában. Jelenleg a bánya egyik termében van, amelyből 5 ajtó nyílik. Az 1. ajtó egy olyan alagútra nyílik, amely 2 óra séta után kivezet a szabadba. A 2. ajtó egy olyan alagútra nyílik, amely 1 óra séta után visszavezet a terembe a 3. ajtón keresztül. A 4. ajtó egy olyan alagútra nyílik, amely 3 óra séta után visszavezet a terembe az 5. ajtón keresztül.

   A bányász találomra választ egy ajtót, majd végigmegy az alagúton. Sajnos elég feledékeny, ezért ha visszaér a terembe, akkor újra találomra választ az ajtók közül egyet. Mindezt addig ismétli, amíg ki nem jut a szabadba.

   Jelölje X a kijutáshoz szükséges idő várható értékét. Számítsuk ki $\mathbb{E}(X)$-et.

5. Egy bizonyos betegségre kifejlesztett teszt úgy működik, hogy ha a tesztalany beteg, akkor a teszt mindenképpen jelzi a betegséget, míg ha az alany egészséges, 1% eséllyel akkor is betegséget jelez (99% eséllyel pedig azt, hogy az alany egészséges). A populációban átlagosan minden 1000. ember szenved ebben a betegségben. Feltéve, hogy egy találomra választott embernél a teszt betegséget jelez, mekkora az esélye, hogy valóban beteg?

6. Florida partjainál évente átlagosan $2,3$ cápatámadás történik. Mennyi a valószínűsége, hogy egy adott évben legfeljebb 1 támadás történik?

7. Egy 500 oldalas könyv 1000 sajtóhubát tartalmaz. Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott oldalon legalább 2 sajtóhiba van? (Feltesszük, hogy minden hiba bármelyik oldalra egyforma valószínűséggel esik.)

8. Egy tesztvizsgán 20 kérdés van, mindegyikre igen vagy nem a válasz. Minden kérdésnél három eset lehet: tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{5}{7}$; csak azt hisszük, hogy tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{1}{7}$; illetve nem tudjuk a helyes választ – ennek $\frac{1}{7}$ a valószínűsége, és ekkor $\frac{1}{2}$–$\frac{1}{2}$ valószínűséggel válaszolunk igent, vagy nemet. Mekkora valószínűséggel válaszolunk az első kérdésre helyesen? Milyen eloszlású a helyes válaszok száma? Mekkora a valószínűsége, hogy legalább 18 helyes választ érünk el?

9. Egy sportversenyen a résztvevőknek egy labdát kell minél messzebbre dobniuk. Jelölje X Zsuzsa egy dobásának nagyságát. X sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{75}{x^2} & 30 \leq x \leq 50 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

   (a) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Zsuzsa 45 méternél messzebb dob.
   (b) Számítsuk ki X eloszlásfüggvényét.
   (c) Számítsuk ki $\mathbb{E}(X)$ értékét.
   (d) Minden versenyző 3-szor dobhat, és a három dobás közül a legnagyobb lesz a pontszáma. Adjuk meg Zsuzsa pontszámának eloszlását. (Azt feltesszük, hogy az egyes dobások függetlenek.)

10. Egy villanykörte X élettartamának eloszlása exponenciális úgy, hogy $\mathbb{P}(X > 10) = 0.8$ teljesül (az időegység 100 óra). Számítsuk ki az eloszlás paraméterét és X várható értékét.

11. Egy bitsorozatban minden bit értéke 1/100 valószínűséggel hibás.
   (a) Legyen X az első hibás bit pozíciója. Milyen eloszlású X?
   (b) Legyen Y a hibás bitek száma az első 500 bitből. Milyen eloszlású Y?
   (c) Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, optimista geometriai eloszlású valószínűségi változók sorozata (p paraméterrel), n pedig rögzített pozitív egész. Legyen N a legkisebb olyan egész szám, hogy $X_1 + \cdots + X_{N+1} > n$. Milyen eloszlású N és miért?

12. Egy 120 fős középiskolai évfolyam biológia és matematika jegyei a következőképpen alakultak:

$B \backslash M$	1	2	3	4	5
1	1	2	2	1	4
2	2	4	4	8	2
3	4	8	8	12	8
4	5	4	6	9	6
5	0	6	4	6	4

   Kiválasztunk egy tanulót az évfolyamból találomra; legyen a matematika jegye X, a biológia jegye Y.

   (a) $\mathbb{P}$(a kiválasztott tanuló megbukott legalább az egyik tárgyból) =?
   (b) $\mathbb{E}(X)$ =?
   (c) $\mathbb{P}(X = 5 | Y \geq 4)$ =?
   (d) Független-e X és Y? $\mathrm{Cov}(X, Y)$ =?