Statisztika II - hipotézisvizsgálat

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/11/28

(1) Hipotézisvizsgálat általában
(2) A próba szerkezete
(3) Próbák a várható értékre (u-próba, t-próba)
(4) Nemparaméteres próbák (χ^2-próbák)

Motiváció

Egy zacskó cukor névleges tömege 1000 g. Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy a cukorgyár nem csal-e azzal, hogy kevesebb cukrot tölt a zacskókba.

Motiváció

Egy zacskó cukor névleges tömege 1000 g. Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy a cukorgyár nem csal-e azzal, hogy kevesebb cukrot tölt a zacskókba.

A csomagolási technológia miatt az egy zacskóba kerülő cukor mennyisége véletlenszerű, ezért az, hogy egy-két zacskóban kevesebb a cukor tömege, mint 1000 g, még nem feltétlen jelent tendeciózus csalást.

Motiváció

Egy zacskó cukor névleges tömege 1000 g. Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy a cukorgyár nem csal-e azzal, hogy kevesebb cukrot tölt a zacskókba.

A csomagolási technológia miatt az egy zacskóba kerülő cukor mennyisége véletlenszerű, ezért az, hogy egy-két zacskóban kevesebb a cukor tömege, mint 1000 g, még nem feltétlen jelent tendeciózus csalást.

Általában az ilyen helyzetet úgy vizsgáljuk, hogy veszünk egy mintát, és az alapján hozunk egy döntést: elfogadjuk vagy elutasítjuk az adott információt. Ez a *hipotézisvizsgálat*.

Motiváció

Egy zacskó cukor névleges tömege 1000 g. Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy a cukorgyár nem csal-e azzal, hogy kevesebb cukrot tölt a zacskókba.

A csomagolási technológia miatt az egy zacskóba kerülő cukor mennyisége véletlenszerű, ezért az, hogy egy-két zacskóban kevesebb a cukor tömege, mint 1000 g, még nem feltétlen jelent tendeciózus csalást.

Általában az ilyen helyzetet úgy vizsgáljuk, hogy veszünk egy mintát, és az alapján hozunk egy döntést: elfogadjuk vagy elutasítjuk az adott információt. Ez a *hipotézisvizsgálat*.

Példa. Megmérjük 5 zacskóban a cukor tömegét, és a következőket kapjuk: 986, 992, 1003, 976, 968 g. Ez alapján elfogadjuk-e, hogy a zacskókba kerülő cukor várható értéke 1000 g?

Hipotézisvizsgálat

Az általános keret a következő. Adott egy kezdeti hipotézis (információ), amit tesztelni szeretnénk. Ez a *nullhipotézis*, amit H_0-lal jelölünk. Egy bináris döntést akarunk hozni arról, hogy H_0 elfogadható-e vagy nem. A cukros példában

- H_0: az egy zacskóba kerülő cukor tömegének várható értéke 1000 g.

Hipotézisvizsgálat

Az általános keret a következő. Adott egy kezdeti hipotézis (információ), amit tesztelni szeretnénk. Ez a *nullhipotézis*, amit H_0-lal jelölünk. Egy bináris döntést akarunk hozni arról, hogy H_0 elfogadható-e vagy nem. A cukros példában

- H_0: az egy zacskóba kerülő cukor tömegének várható értéke 1000 g.

Az *ellenhipotézis* a másik döntési lehetőség, amit H_1-gyel jelölünk. Gyakran ez a nullhipotézis komplementere, de ez nem szükségszerű, elég az, hogy H_0 és H_1 nem teljesülhet egyszerre. A cukros példában egy természetes választás H_1-re

- H_1: az egy zacskóba kerülő cukor tömegének várható értéke nem egyenlő 1000 grammal.

Hipotézisvizsgálat

Az általános keret a következő. Adott egy kezdeti hipotézis (információ), amit tesztelni szeretnénk. Ez a *nullhipotézis*, amit H_0-lal jelölünk. Egy bináris döntést akarunk hozni arról, hogy H_0 elfogadható-e vagy nem. A cukros példában

- H_0: az egy zacskóba kerülő cukor tömegének várható értéke 1000 g.

Az *ellenhipotézis* a másik döntési lehetőség, amit H_1-gyel jelölünk. Gyakran ez a nullhipotézis komplementere, de ez nem szükségszerű, elég az, hogy H_0 és H_1 nem teljesülhet egyszerre. A cukros példában egy természetes választás H_1-re

- H_1: az egy zacskóba kerülő cukor tömegének várható értéke nem egyenlő 1000 grammal.

Egy másik lehetséges választás H_1-re

- H_1: az egy zacskóba kerülő cukor tömegének várható értéke kevesebb, mint 1000 g.

Hipotézisvizsgálat

Ezután veszünk egy mintát, és a minta alapján végrehajtunk egy próbát. A próba általában a mintán, H_0-on és H_1-en alapuló számítás, ami egy döntést eredményez: vagy

- elfogadjuk H_0-t, vagy
- elvetjük H_0-t és H_1-et fogadjuk el.

Hipotézisvizsgálat

Ezután veszünk egy mintát, és a minta alapján végrehajtunk egy próbát. A próba általában a mintán, H_0-on és H_1-en alapuló számítás, ami egy döntést eredményez: vagy

- elfogadjuk H_0-t, vagy
- elvetjük H_0-t és H_1-et fogadjuk el.

A próba tulajdonképpen felosztja a lehetséges minták terét két tartományra: az elfogadási tartományban elfogadjuk H_0-t, a másik tartományban elvetjük H_0-t H_1 javára.

Ezután veszünk egy mintát, és a minta alapján végrehajtunk egy próbát. A próba általában a mintán, H_0-on és H_1-en alapuló számítás, ami egy döntést eredményez: vagy

- elfogadjuk H_0-t, vagy
- elvetjük H_0-t és H_1-et fogadjuk el.

A próba tulajdonképpen felosztja a lehetséges minták terét két tartományra: az elfogadási tartományban elfogadjuk H_0-t, a másik tartományban elvetjük H_0-t H_1 javára.

A lehetőségek:

	H_0 igaz	H_0 hamis
elfogadjuk H_0-t	✓	másodfajú hiba
elvetjük H_0-t	elsőfajú hiba	✓

Ezután veszünk egy mintát, és a minta alapján végrehajtunk egy próbát. A próba általában a mintán, H_0-on és H_1-en alapuló számítás, ami egy döntést eredményez: vagy

- elfogadjuk H_0-t, vagy
- elvetjük H_0-t és H_1-et fogadjuk el.

A próba tulajdonképpen felosztja a lehetséges minták terét két tartományra: az elfogadási tartományban elfogadjuk H_0-t, a másik tartományban elvetjük H_0-t H_1 javára.

A lehetőségek:

	H_0 igaz	H_0 hamis
elfogadjuk H_0-t	✓	másodfajú hiba
elvetjük H_0-t	elsőfajú hiba	✓

Ideális esetben egy próba 0 elsőfajú és 0 másodfajú hibát eredményezne, de ez nem lehetséges a minta véletlensége miatt.

A próba szerkezete

Két triviális próba következik.

A próba szerkezete

Két triviális próba következik.

Ha H_0-t mindig elfogadjuk, a mintától függetlenül, akkor sosem vétünk elsőfajú hibát.

A próba szerkezete

Két triviális próba következik.

Ha H_0-t mindig elfogadjuk, a mintától függetlenül, akkor sosem vétünk elsőfajú hibát.

Ha ellenben H_0-t mindig elvetjük, sosem vétünk másodfajú hibát.

A próba szerkezete

Két triviális próba következik.

Ha H_0-t mindig elfogadjuk, a mintától függetlenül, akkor sosem vétünk elsőfajú hibát.

Ha ellenben H_0-t mindig elvetjük, sosem vétünk másodfajú hibát.

A tipikus próba a kettő között van: elfogadjuk H_0-t bizonyos mintákra, és elvetjük H_0-t más mintákra.

A próba szerkezete

Két triviális próba következik.

Ha H_0-t mindig elfogadjuk, a mintától függetlenül, akkor sosem vétünk elsőfajú hibát.

Ha ellenben H_0-t mindig elvetjük, sosem vétünk másodfajú hibát.

A tipikus próba a kettő között van: elfogadjuk H_0-t bizonyos mintákra, és elvetjük H_0-t más mintákra.

Van egy egyensúly: ha az elfogadási tartomány nagyobb, akkor az elsőfajú hiba valószínűsége kisebb és a másodfajú hiba valószínűsége nagyobb, míg ha az elfogadási tartomány kisebb, akkor fordítva.

A próba szerkezete

Egy próbánál a döntést fel lehet úgy is fogni, hogy azt vizsgáljuk, hogy a minta tipikusnak tekinthető-e H_0 szerint. Ha igen, elfogadjuk H_0-t, ha nem, elvetjük H_0-t.

A próba szerkezete

Egy próbánál a döntést fel lehet úgy is fogni, hogy azt vizsgáljuk, hogy a minta tipikusnak tekinthető-e H_0 szerint. Ha igen, elfogadjuk H_0-t, ha nem, elvetjük H_0-t.

Az elfogadási tartomány méretét a *szignifikanciaszint* (más néven konfidenciaszint) révén adjuk meg. Egy próba szignifikanciaszintje egy 0 és 100% közötti érték; például 95%-os szignifikanciaszint azt jelenti, hogy H_0-t elfogadjuk a minta alapján, ha beleesik az összes minta közül a H_0 szerint legtipikusabb 95%-ba.

A próba szerkezete

Egy próbánál a döntést fel lehet úgy is fogni, hogy azt vizsgáljuk, hogy a minta tipikusnak tekinthető-e H_0 szerint. Ha igen, elfogadjuk H_0-t, ha nem, elvetjük H_0-t.

Az elfogadási tartomány méretét a *szignifikanciaszint* (más néven konfidenciaszint) révén adjuk meg. Egy próba szignifikanciaszintje egy 0 és 100% közötti érték; például 95%-os szignifikanciaszint azt jelenti, hogy H_0-t elfogadjuk a minta alapján, ha beleesik az összes minta közül a H_0 szerint legtipikusabb 95%-ba.

A szignifikanciaszint tehát a H_0-ba vetett bizalom szintje; az értékét mi döntjük el előre. Semmiképpen sem jellemzi azt, hogy mennyire jó a próba.

A próba szerkezete

Egy próbánál a döntést fel lehet úgy is fogni, hogy azt vizsgáljuk, hogy a minta tipikusnak tekinthető-e H_0 szerint. Ha igen, elfogadjuk H_0-t, ha nem, elvetjük H_0-t.

Az elfogadási tartomány méretét a *szignifikanciaszint* (más néven konfidenciaszint) révén adjuk meg. Egy próba szignifikanciaszintje egy 0 és 100% közötti érték; például 95%-os szignifikanciaszint azt jelenti, hogy H_0-t elfogadjuk a minta alapján, ha beleesik az összes minta közül a H_0 szerint legtipikusabb 95%-ba.

A szignifikanciaszint tehát a H_0-ba vetett bizalom szintje; az értékét mi döntjük el előre. Semmiképpen sem jellemzi azt, hogy mennyire jó a próba.

Annak eldöntése, hogy egy minta tipikusnak tekinthető-e, általában egy statisztika kiszámításával történik, amiről már könnyebb eldönteni, hogy tipikus-e (H_0 teljesülése esetén).

A próba szerkezete

A legtöbb próba szerkezete a következő:

- kiszámítunk egy *statisztikát* a mintából,
- kiszámítunk egy *percentilist* (más néven kvantilist) a szignifikanciaszint és a statisztika H_0 szerinti elméleti eloszlása alapján,
- majd a döntést a statisztika és percentilis összehasonlítása alapján hozzuk meg.

A szignifikanciaszint az elsőfajú hibát kontrollálja; ha a szignifikanciaszint $1 - \varepsilon$, akkor az elsőfajú hiba valószínűsége ε. A másodfajú hibát nem kontrolláljuk.

A próba szerkezete

A legtöbb próba szerkezete a következő:

- kiszámítunk egy *statisztikát* a mintából,
- kiszámítunk egy *percentilist* (más néven kvantilist) a szignifikanciaszint és a statisztika H_0 szerinti elméleti eloszlása alapján,
- majd a döntést a statisztika és percentilis összehasonlítása alapján hozzuk meg.

A szignifikanciaszint az elsőfajú hibát kontrollálja; ha a szignifikanciaszint $1 - \varepsilon$, akkor az elsőfajú hiba valószínűsége ε. A másodfajú hibát nem kontrolláljuk.

Statisztikai programok általában a következő módon működnek: az adott szignifikanciaszinthez tartozó percentilis kiszámítása helyett azt adják meg, mi a legkisebb szignifikanciaszint, amin H_0-t még elfogadjuk az adott minta alapján. Ez az érték az ún. *p-értéke* a mintának. Ezután a *p*-érték közvetlenül összehasonlítható a kívánt szignifikanciaszinttel.

Próbák a várható értékre – egymintás, kétoldali u-próba

A következő próba az *egymintás, kétoldali u-próba* (angolul z-test), amivel a minta várható értékét lehet tesztelni egy rögzített érték ellenében. A CHT-n alapul.

Próbák a várható értékre – egymintás, kétoldali u-próba

A következő próba az *egymintás, kétoldali u-próba* (angolul z-test), amivel a minta várható értékét lehet tesztelni egy rögzített érték ellenében. A CHT-n alapul.

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$ ismert szórással és $\mathbb{E}(X_1) = m$ ismeretlen várható értékkel. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ egy adott érték;
- H_1: $m \neq \mu$.

Próbák a várható értékre – egymintás, kétoldali u-próba

A következő próba az *egymintás, kétoldali u-próba* (angolul z-test), amivel a minta várható értékét lehet tesztelni egy rögzített érték ellenében. A CHT-n alapul.

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$ ismert szórással és $\mathbb{E}(X_1) = m$ ismeretlen várható értékkel. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ egy adott érték;
- H_1: $m \neq \mu$.

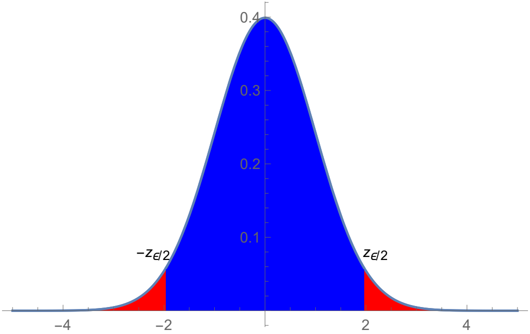
Ahhoz, hogy H_0-t teszteljük H_1 ellen $1 - \varepsilon$ szignifikanciaszinten, a következőket végezzük el:

- kiszámítjuk az $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ statisztikát a mintából;
- kiszámítjuk az $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)$ percentilist a standard normális eloszlás táblázatából és a szignifikanciaszintből, és
- ha $u \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}]$ teljesül, elfogadjuk H_0-t; ha nem teljesül, elvetjük H_0-t.

Ha u elég közel van 0-hoz, akkor az u és $u_{\varepsilon/2}$ eltérést elfogadjuk a véletlen mintavételből származónak, és elfogadjuk H_0-t.

Ha u elég közel van 0-hoz, akkor az u és $u_{\varepsilon/2}$ eltérést elfogadjuk a véletlen mintavételből származónak, és elfogadjuk H_0-t.

Ha u túl távol van 0-tól, akkor nem fogadjuk el, hogy az eltérés a véletlen mintavételből származik, és elvetjük H_0-t.



A cukros példa

A cukros példában a minta

$$X_1 = 986, \quad X_2 = 992, \quad X_3 = 1003, \quad X_4 = 976, \quad X_5 = 968.$$

Tegyük fel, hogy $\sigma = 20$ ismert a csomagolási technológia révén.

- H_0: $m = 1000$;
- H_1: $m \neq 1000$.

Teszteljük H_0-t H_1 ellenében 95% szignifikanciaszinten.

A cukros példa

Először kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{985 - 1000}{20}\sqrt{5} = -1.677.$$

A cukros példa

Először kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{985 - 1000}{20}\sqrt{5} = -1.677.$$

Majd kiszámítjuk a percentilist:

$$u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$$

A cukros példa

Először kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{985 - 1000}{20}\sqrt{5} = -1.677.$$

Majd kiszámítjuk a percentilist:

$$u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$$

Végül ellenőrizzük, hogy $u \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}]$ teljesül-e.

$$-1.677 \in [-1.96, 1.96]$$

teljesül, így elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten.

Próbák a várható értékre – egymintás, egyoldali u-próba

Legyen adott egy $X_1, \dots, X_n$ fae minta, ahol $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$ ismert és $\mathbb{E}(X_1) = m$ ismeretlen. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ adott konstans;
- H_1: $m < \mu$.

Próbák a várható értékre – egymintás, egyoldali u-próba

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta, ahol $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$ ismert és $\mathbb{E}(X_1) = m$ ismeretlen. Legyen

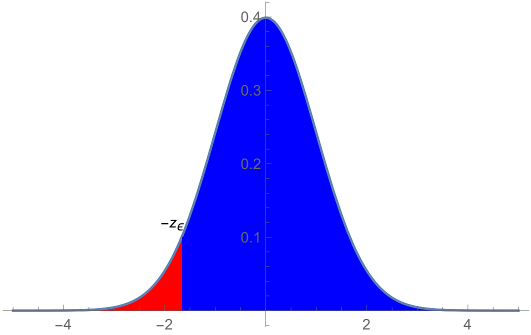
- H_0: $m = \mu$, ahol μ adott konstans;
- H_1: $m < \mu$.

Ahhoz, hogy H_0-t teszteljük H_1 ellenében $1 - \varepsilon$ szignifikanciaszinten, a következőket csináljuk:

- kiszámítjuk az $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ statisztikát a mintából;
- kiszámítjuk a $u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$ percentilist a standard normális eloszlás táblázatából és a szignifikanciaszintből, és
- ha $u \in [-u_\varepsilon, \infty)$ teljesül, elfogadjuk H_0-t; ha nem, akkor elvetjük H_0-t H_1 javára.

Próbák a várható értékre – egymintás, egyoldali u-próba

Ha u túl távol van 0-tól balra, akkor nem fogadjuk el, hogy az eltérés a véletlen mintavételből származik, és így elvetjük H_0-t H_1 javára. (Az ábrán a teljes ε valószínűséget a bal oldalra csoportosítjuk.)



Legyen adott egy $X_1, \dots, X_n$ fae minta, ahol $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$ ismert és $\mathbb{E}(X_1) = m$ ismeretlen. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ adott konstans;
- H_1: $m > \mu$.

Próbák a várható értékre – egymintás, egyoldali u-próba

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta, ahol $\mathbb{D}(X_1) = \sigma$ ismert és $\mathbb{E}(X_1) = m$ ismeretlen. Legyen

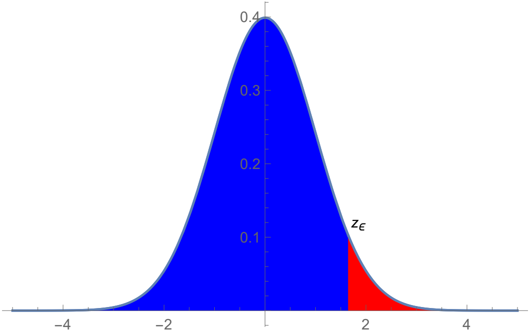
- H_0: $m = \mu$, ahol μ adott konstans;
- H_1: $m > \mu$.

Ahhoz, hogy H_0-t teszteljük H_1 ellenében $1 - \varepsilon$ szignifikanciaszinten, a következőket csináljuk:

- kiszámítjuk az $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ statisztikát a mintából;
- kiszámítjuk a $u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$ percentilist a standard normális eloszlás táblázatából és a szignifikanciaszintből, és
- ha $u \in (-\infty, u_\varepsilon]$ teljesül, elfogadjuk H_0-t; ha nem, akkor elvetjük H_0-t H_1 javára.

Próbák a várható értékre – egymintás, egyoldali u-próba

Ha u túl távol van 0-tól jobbra, akkor nem fogadjuk el, hogy az eltérés a véletlen mintavételből származik, és így elvetjük H_0-t H_1 javára. (Az ábrán a teljes ε valószínűséget a jobb oldalra csoportosítjuk.)



Próbák és határeloszlás-tételek

Az u-próbák a CHT-n alapulnak, ami garantálja, hogy az $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ statisztika közel N(0,1) eloszlású, ha H_0 teljesül.

Próbák és határeloszlás-tételek

Az u-próbák a CHT-n alapulnak, ami garantálja, hogy az $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ statisztika közel N(0,1) eloszlású, ha H_0 teljesül.

Általában a legtöbb próba esetében van egy határeloszlás-tétel a háttérben. Lehet másik tétel, mint a CHT, és a határeloszlás is lehet N(0,1)-től eltérő. Ilyenkor a percentilis értékét egy másik eloszláshoz tartozó táblázatból vesszük.

Próbák és határeloszlás-tételek

Az u-próbák a CHT-n alapulnak, ami garantálja, hogy az $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ statisztika közel N(0,1) eloszlású, ha H_0 teljesül.

Általában a legtöbb próba esetében van egy határeloszlás-tétel a háttérben. Lehet másik tétel, mint a CHT, és a határeloszlás is lehet N(0,1)-től eltérő. Ilyenkor a percentilis értékét egy másik eloszláshoz tartozó táblázatból vesszük.

Mindazonáltal a legtöbb próbának a szerkezete ugyanaz:

- kiszámítjuk a statisztikát a minta alapján;
- kiszámítjuk a percentilist a releváns eloszlás táblázata és a szignifikanciaszint alapján, és
- összehasonlítjuk a statisztikát és a percentilist, ami alapján elfogadjuk vagy elvetjük H_0-t.

Próbák és határeloszlás-tételek

Az u-próbák a CHT-n alapulnak, ami garantálja, hogy az $u = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$ statisztika közel N(0,1) eloszlású, ha H_0 teljesül.

Általában a legtöbb próba esetében van egy határeloszlás-tétel a háttérben. Lehet másik tétel, mint a CHT, és a határeloszlás is lehet N(0,1)-től eltérő. Ilyenkor a percentilis értékét egy másik eloszláshoz tartozó táblázatból vesszük.

Mindazonáltal a legtöbb próbának a szerkezete ugyanaz:

- kiszámítjuk a statisztikát a minta alapján;
- kiszámítjuk a percentilist a releváns eloszlás táblázata és a szignifikanciaszint alapján, és
- összehasonlítjuk a statisztikát és a percentilist, ami alapján elfogadjuk vagy elvetjük H_0-t.

Mi erre a szerkezetre fogunk koncentrálni, nem a háttérben meghúzódó határeloszlás-tételekre.

A kétmintás, kétoldali u-próba esetében 2 különálló minta adott:

- $X_1, \ldots, X_n$ fae, ismert σ_1 szórással és ismeretlen m_1 várható értékkel;
- $Y_1, \ldots, Y_m$ fae (és az X-ektől is független), ismert σ_2 szórással és ismeretlen m_2 várható értékkel.

Próbák a várható értékre – kétmintás, kétoldali u-próba

A kétmintás, kétoldali u-próba esetében 2 különálló minta adott:

- $X_1, \ldots, X_n$ fae, ismert σ_1 szórással és ismeretlen m_1 várható értékkel;
- $Y_1, \ldots, Y_m$ fae (és az X-ektől is független), ismert σ_2 szórással és ismeretlen m_2 várható értékkel.

A próba célja a két minta várható értékének összevetése:

- H_0: $m_1 = m_2$;
- H_1: $m_1 \neq m_2$;

Próbák a várható értékre – kétmintás, kétoldali u-próba

A kétmintás, kétoldali u-próba esetében 2 különálló minta adott:

- $X_1, \ldots, X_n$ fae, ismert σ_1 szórással és ismeretlen m_1 várható értékkel;
- $Y_1, \ldots, Y_m$ fae (és az X-ektől is független), ismert σ_2 szórással és ismeretlen m_2 várható értékkel.

A próba célja a két minta várható értékének összevetése:

- H_0: $m_1 = m_2$;
- H_1: $m_1 \neq m_2$;

A próba a következő:

- a mintákból kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- N(0,1) táblázatából és az $1 - \varepsilon$ szignifikanciaszintből kiszámítjuk az $u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)$ percentilist;
- ha $u \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}]$ teljesül, elfogadjuk H_0-t, egyébként elvetjük H_0-t.

Próbák a várható értékre – kétmintás, egyoldali u-próba

A kétmintás, egyoldali u-próba esetében 2 különálló minta adott:

- $X_1, \ldots, X_n$ fae, ismert σ_1 szórással és ismeretlen m_1 várható értékkel;
- $Y_1, \ldots, Y_m$ fae (és az X-ektől is független), ismert σ_2 szórással és ismeretlen m_2 várható értékkel.

Próbák a várható értékre – kétmintás, egyoldali u-próba

A kétmintás, egyoldali u-próba esetében 2 különálló minta adott:

- $X_1, \ldots, X_n$ fae, ismert σ_1 szórással és ismeretlen m_1 várható értékkel;
- $Y_1, \ldots, Y_m$ fae (és az X-ektől is független), ismert σ_2 szórással és ismeretlen m_2 várható értékkel.

A próba célja a két minta várható értékének összevetése:

- H_0: $m_1 = m_2$;
- H_1: $m_1 > m_2$;

A kétmintás, egyoldali u-próba esetében 2 különálló minta adott:

- $X_1, \ldots, X_n$ fae, ismert σ_1 szórással és ismeretlen m_1 várható értékkel;
- $Y_1, \ldots, Y_m$ fae (és az X-ektől is független), ismert σ_2 szórással és ismeretlen m_2 várható értékkel.

A próba célja a két minta várható értékének összevetése:

- H_0: $m_1 = m_2$;
- H_1: $m_1 > m_2$;

A próba a következő:

- a mintákból kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

- N(0,1) táblázatából és az $1 - \varepsilon$ szignifikanciaszintből kiszámítjuk az $u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon)$ percentilist;
- ha $u \in (-\infty, u_\varepsilon]$ teljesül, elfogadjuk H_0-t, egyébként elvetjük H_0-t.

Próbák a várható értékre – t-próba

Az u-próbában mindig feltettük, hogy a σ szórás ismert. De mi a helyzet, ha σ nem ismert?

Próbák a várható értékre – t-próba

Az u-próbában mindig feltettük, hogy a σ szórás ismert. De mi a helyzet, ha σ nem ismert?

Esetleg használhatjuk σ helyett a minta s_n empirikus szórását vagy az s_n^* korrigált empirikus szórást (az utóbbit fogjuk). Ez lesz a t-próba.

Próbák a várható értékre – t-próba

Az u-próbában mindig feltettük, hogy a σ szórás ismert. De mi a helyzet, ha σ nem ismert?

Esetleg használhatjuk σ helyett a minta s_n empirikus szórását vagy az s_n^* korrigált empirikus szórást (az utóbbit fogjuk). Ez lesz a t-próba.

A fő különbség az u-próbához képest, hogy amíg n kicsi, addig $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n}$ eloszlása N(0,1) helyett a *Student-féle t-eloszlás* vagy egyszerűen csak t-eloszlás. Ennek megfelelően a percentilis is a t-eloszlás táblázatából jön majd.

Próbák a várható értékre – t-próba

Az u-próbában mindig feltettük, hogy a σ szórás ismert. De mi a helyzet, ha σ nem ismert?

Esetleg használhatjuk σ helyett a minta s_n empirikus szórását vagy az s_n^* korrigált empirikus szórást (az utóbbit fogjuk). Ez lesz a t-próba.

A fő különbség az u-próbához képest, hogy amíg n kicsi, addig $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n}$ eloszlása N(0,1) helyett a *Student-féle t-eloszlás* vagy egyszerűen csak t-eloszlás. Ennek megfelelően a percentilis is a t-eloszlás táblázatából jön majd.

Minden n-re van egy külön t-eloszlás, ezért a *szabadsági fokot* is könyvelnünk kell: ha a minta mérete n, akkor a percentilist az $n-1$ szabadsági fokú t-eloszlás táblázatából vesszük.

Próbák a várható értékre – t-próba

Az u-próbában mindig feltettük, hogy a σ szórás ismert. De mi a helyzet, ha σ nem ismert?

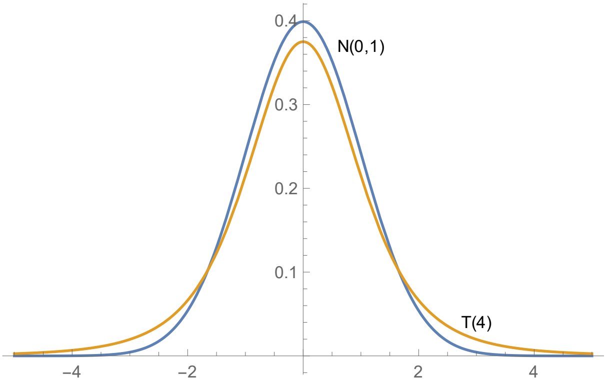
Esetleg használhatjuk σ helyett a minta s_n empirikus szórását vagy az s_n^* korrigált empirikus szórást (az utóbbit fogjuk). Ez lesz a t-próba.

A fő különbség az u-próbához képest, hogy amíg n kicsi, addig $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n}$ eloszlása N(0,1) helyett a *Student-féle t-eloszlás* vagy egyszerűen csak t-eloszlás. Ennek megfelelően a percentilis is a t-eloszlás táblázatából jön majd.

Minden n-re van egy külön t-eloszlás, ezért a *szabadsági fokot* is könyvelnünk kell: ha a minta mérete n, akkor a percentilist az $n-1$ szabadsági fokú t-eloszlás táblázatából vesszük.

Amint $n \to \infty$, a t-eloszlás tart az N(0,1) eloszláshoz, így ha n nagy (pl. $n > 30$), az u-próba és a t-próba gyakorlatilag megegyezik.

Az N(0,1) eloszlás és a 4 szabadsági fokú t-eloszlás sűrűségfüggvényeinek összehasonlítása:



Legyen adott egy $X_1, \dots, X_n$ fae minta ismeretlen $\mathbb{D}(X_1)$ szórással és ismeretlen $\mathbb{E}(X_1) = m$ várható értékkel. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ egy adott érték;
- H_1: $m \neq \mu$.

Próbák a várható értékre – egymintás, kétoldali t-próba

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta ismeretlen $\mathbb{D}(X_1)$ szórással és ismeretlen $\mathbb{E}(X_1) = m$ várható értékkel. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ egy adott érték;
- H_1: $m \neq \mu$.

Ahhoz, hogy H_0-t teszteljük H_1 ellen $1-\varepsilon$ szignifikanciaszinten, a következőket végezzük el:

- kiszámítjuk a $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n}$ statisztikát a mintából;
- kiszámítjuk a $t_{\varepsilon/2}$ percentilist az $n-1$ szabadsági fokú t-eloszlás táblázatából és a szignifikanciaszintből, és
- ha $t \in [-t_{\varepsilon/2}, t_{\varepsilon/2}]$ teljesül, elfogadjuk H_0-t; ha nem teljesül, elvetjük H_0-t.

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta ismeretlen $\mathbb{D}(X_1)$ szórással és ismeretlen $\mathbb{E}(X_1) = m$ várható értékkel. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ egy adott érték;
- H_1: $m > \mu$.

Próbák a várható értékre – egymintás, egyoldali t-próba

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta ismeretlen $\mathbb{D}(X_1)$ szórással és ismeretlen $\mathbb{E}(X_1) = m$ várható értékkel. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ egy adott érték;
- H_1: $m > \mu$.

Ahhoz, hogy H_0-t teszteljük H_1 ellen $1 - \varepsilon$ szignifikanciaszinten, a következőket végezzük el:

- kiszámítjuk a $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n}$ statisztikát a mintából;
- kiszámítjuk a t_ε percentilist az $n - 1$ szabadsági fokú t-eloszlás táblázatából és a szignifikanciaszintből, és
- ha $t \in (-\infty, t_\varepsilon]$ teljesül, elfogadjuk H_0-t; ha nem teljesül, elvetjük H_0-t.

Próbák a várható értékre – egymintás, egyoldali t-próba

Legyen adott egy $X_1, \ldots, X_n$ fae minta ismeretlen $\mathbb{D}(X_1)$ szórással és ismeretlen $\mathbb{E}(X_1) = m$ várható értékkel. Legyen

- H_0: $m = \mu$, ahol μ egy adott érték;
- H_1: $m > \mu$.

Ahhoz, hogy H_0-t teszteljük H_1 ellen $1 - \varepsilon$ szignifikanciaszinten, a következőket végezzük el:

- kiszámítjuk a $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n}$ statisztikát a mintából;
- kiszámítjuk a t_ε percentilist az $n-1$ szabadsági fokú t-eloszlás táblázatából és a szignifikanciaszintből, és
- ha $t \in (-\infty, t_\varepsilon]$ teljesül, elfogadjuk H_0-t; ha nem teljesül, elvetjük H_0-t.

A kétmintás t-próbákhoz a hipotézisvizsgálatos táblázatra hivatkozunk.

A lila bab fogyasztása gyógyítja a rákot!!!4!

Tanmese következik. Egy újságíró megkeres egy tudóst, hogy szerinte a bab fogyasztása gyógyítja a rákot.

A lila bab fogyasztása gyógyítja a rákot!!!4!

Tanmese következik. Egy újságíró megkeres egy tudóst, hogy szerinte a bab fogyasztása gyógyítja a rákot.

A tudós csinál egy tesztet, amiben azt teszteli, hogy a babfogyasztás hatása a rák gyógyulására pozitívnak tekinthető-e (azaz H_0 az, hogy a hatás 0, H_1 az, hogy pozitív). 95%-os konfidenciaszinten azt kapja, hogy a hatás nulla.

A lila bab fogyasztása gyógyítja a rákot!!!4!

Tanmese következik. Egy újságíró megkeres egy tudóst, hogy szerinte a bab fogyasztása gyógyítja a rákot.

A tudós csinál egy tesztet, amiben azt teszteli, hogy a babfogyasztás hatása a rák gyógyulására pozitívnak tekinthető-e (azaz H_0 az, hogy a hatás 0, H_1 az, hogy pozitív). 95%-os konfidenciaszinten azt kapja, hogy a hatás nulla.

Erre az újságíró azt mondja, hogy de ő úgy tudja, hogy a bab színe is számít. Erre a tudós csinál tesztet, amiben 20 különböző színű babot (fehér, barna, lila stb.) külön-külön tesztel.

A lila bab fogyasztása gyógyítja a rákot!!!4!

Tanmese következik. Egy újságíró megkeres egy tudóst, hogy szerinte a bab fogyasztása gyógyítja a rákot.

A tudós csinál egy tesztet, amiben azt teszteli, hogy a babfogyasztás hatása a rák gyógyulására pozitívnak tekinthető-e (azaz H_0 az, hogy a hatás 0, H_1 az, hogy pozitív). 95%-os konfidenciaszinten azt kapja, hogy a hatás nulla.

Erre az újságíró azt mondja, hogy de ő úgy tudja, hogy a bab színe is számít. Erre a tudós csinál tesztet, amiben 20 különböző színű babot (fehér, barna, lila stb.) külön-külön tesztel.

19 színnél az jött ki, hogy 95%-os konfidenciaszinten a hatás nulla, de egy színnél, a lila babnál az jött ki, hogy 95%-os konfidenciaszinten a lila bab hatása pozitív a rák gyógyulására.

A lila bab fogyasztása gyógyítja a rákot!!!4!

Tanmese következik. Egy újságíró megkeres egy tudóst, hogy szerinte a bab fogyasztása gyógyítja a rákot.

A tudós csinál egy tesztet, amiben azt teszteli, hogy a babfogyasztás hatása a rák gyógyulására pozitívnak tekinthető-e (azaz H_0 az, hogy a hatás 0, H_1 az, hogy pozitív). 95%-os konfidenciaszinten azt kapja, hogy a hatás nulla.

Erre az újságíró azt mondja, hogy de ő úgy tudja, hogy a bab színe is számít. Erre a tudós csinál tesztet, amiben 20 különböző színű babot (fehér, barna, lila stb.) külön-külön tesztel.

19 színnél az jött ki, hogy 95%-os konfidenciaszinten a hatás nulla, de egy színnél, a lila babnál az jött ki, hogy 95%-os konfidenciaszinten a lila bab hatása pozitív a rák gyógyulására.

Tanulságok. 1. Ne teszteljünk túl! 2. Nagy horderejű, pl. gyógyszeripari teszteket magas konfidenciaszinten végezzünk (pl. 99,99%).

Konfidenciaintervallum

Az egymintás, kétoldali u- és t-próbákhoz lehet számolni konfidenciaintervallumot is. A konfidenciaintervallum egy, a minta alapján számítható intervallum (azaz nem pontbecslés, hanem intervallumbecslés), az u-próba esetén

$$\left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

míg a t-próba esetén

$$\left[\bar{x} - t_{\varepsilon/2}\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\varepsilon/2}\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}\right].$$

Az egymintás, kétoldali u- és t-próbákhoz lehet számolni konfidenciaintervallumot is. A konfidenciaintervallum egy, a minta alapján számítható intervallum (azaz nem pontbecslés, hanem intervallumbecslés), az u-próba esetén

$$\left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

míg a t-próba esetén

$$\left[\bar{x} - t_{\varepsilon/2}\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\varepsilon/2}\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}\right].$$

A naiv interpretáció az, hogy a konfidenciaintervallum $1-\varepsilon$ valószínűséggel tartalmazza a valódi várható értéket.

Konfidenciaintervallum

Az egymintás, kétoldali u- és t-próbákhoz lehet számolni konfidenciaintervallumot is. A konfidenciaintervallum egy, a minta alapján számítható intervallum (azaz nem pontbecslés, hanem intervallumbecslés), az u-próba esetén

$$\left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

míg a t-próba esetén

$$\left[\bar{x} - t_{\varepsilon/2}\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\varepsilon/2}\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}\right].$$

A naiv interpretáció az, hogy a konfidenciaintervallum $1-\varepsilon$ valószínűséggel tartalmazza a valódi várható értéket.

Ez igaz is meg nem is.

Konfidenciaintervallum

Formálisan például az u-próba, azaz ismert σ szórás esetén teljesül, hogy akármi is a valódi m várható érték,

$$\mathbb{P}_m\left(m \in \left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \varepsilon.$$

Konfidenciaintervallum

Formálisan például az u-próba, azaz ismert σ szórás esetén teljesül, hogy akármi is a valódi m várható érték,

$$\mathbb{P}_m\left(m \in \left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \varepsilon.$$

Azonban a véletlen nem az m paraméter értékében van, hanem az $\bar{x}$ mintaátlagban.

Formálisan például az u-próba, azaz ismert σ szórás esetén teljesül, hogy akármi is a valódi m várható érték,

$$\mathbb{P}_m\left(m \in \left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \varepsilon.$$

Azonban a véletlen nem az m paraméter értékében van, hanem az $\bar{x}$ mintaátlagban.

Tehát amíg a mintát nem ismerjük, addig a fenti valószínűség teljesül, de amint a mintát megismertük, onnantól már nincs véletlen a kérdésben; $m \in \left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ vagy teljesül, vagy nem.

Konfidenciaintervallum

Formálisan például az u-próba, azaz ismert σ szórás esetén teljesül, hogy akármi is a valódi m várható érték,

$$\mathbb{P}_m\left(m \in \left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \varepsilon.$$

Azonban a véletlen nem az m paraméter értékében van, hanem az $\bar{x}$ mintaátlagban.

Tehát amíg a mintát nem ismerjük, addig a fenti valószínűség teljesül, de amint a mintát megismertük, onnantól már nincs véletlen a kérdésben; $m \in \left[\bar{x} - u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\varepsilon/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ vagy teljesül, vagy nem.

Egy másik lehetséges interpretáció, hogy a konfidenciaintervallum azokat az m értékeket tartalmazza, amelyeket elfogadnánk a H_0 nullhipotézisben az adott minta esetén.

2. feladat

Egy gyárban a cementet 25 kg névleges súlyú zsákokba csomagolják. A csomagolási technológiából eredően az egy zsákba kerülő cement súlyának szórása 0.5 kg, a várható értéke azonban ismeretlen, jelölje m. Megvizsgálunk 25 zsákot, és azt tapasztaljuk, hogy a bennük lévő cement mennyisége átlagosan 24.82 kg.

(a) Elfogadjuk-e 95%-os szinten az $m = 25$ hipotézist az $m \neq 25$ hipotézis ellenében?

(b) Elfogadjuk-e 90%-os szinten az $m = 25$ hipotézist az $m \neq 25$ hipotézis ellenében?

(c) Tegyük fel, hogy a szórás csak 0.3 kg. Elfogadjuk-e ekkor az 95%-os szinten az $m = 25$ hipotézist az $m \neq 25$ hipotézis ellenében?

2. feladat

Megoldás.

(a) Milyen próbát alkalmazzunk?

2. feladat

Megoldás.

(a) Milyen próbát alkalmazzunk?

- σ ismert, tehát u-próba;

2. feladat

Megoldás.

(a) Milyen próbát alkalmazzunk?

- σ ismert, tehát u-próba;
- egy minta várható értékét teszteljük egy rögzített érték ellen, tehát egymintás u-próba;

Megoldás.

(a) Milyen próbát alkalmazzunk?

- σ ismert, tehát u-próba;
- egy minta várható értékét teszteljük egy rögzített érték ellen, tehát egymintás u-próba;
- H_1-ben $\mu \neq 25$ szerepel, tehát kétoldali egymintás u-próba.

2. feladat

Megoldás.

(a) Milyen próbát alkalmazzunk?

- σ ismert, tehát u-próba;
- egy minta várható értékét teszteljük egy rögzített érték ellen, tehát egymintás u-próba;
- H_1-ben $\mu \neq 25$ szerepel, tehát kétoldali egymintás u-próba.

A nullhipotézis és az ellenhipotézis

- H_0: $\mu = 25$,
- H_1: $\mu \neq 25$.

2. feladat

Megoldás.

(a) Milyen próbát alkalmazzunk?

- σ ismert, tehát u-próba;
- egy minta várható értékét teszteljük egy rögzített érték ellen, tehát egymintás u-próba;
- H_1-ben $\mu \neq 25$ szerepel, tehát kétoldali egymintás u-próba.

A nullhipotézis és az ellenhipotézis

- H_0: $\mu = 25$,
- H_1: $\mu \neq 25$.

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{24.82 - 25}{0.5}\sqrt{25} = -1.8.$$

2. feladat

Megoldás.

(a) Milyen próbát alkalmazzunk?

- σ ismert, tehát u-próba;
- egy minta várható értékét teszteljük egy rögzített érték ellen, tehát egymintás u-próba;
- H_1-ben $\mu \neq 25$ szerepel, tehát kétoldali egymintás u-próba.

A nullhipotézis és az ellenhipotézis

- H_0: $\mu = 25$,
- H_1: $\mu \neq 25$.

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{24.82 - 25}{0.5}\sqrt{25} = -1.8.$$

Kiszámítjuk a percentilist:

$$u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96.$$

2. feladat

(a) Az összehasonlítás:

$$u = -1.8 \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}] = [-1.96, 1.96]$$

teljesül, tehát elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten.

(b) A különbség az, hogy a 90%-os szignifikanciaszinthez tartozó percentilis

$$u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65,$$

és

$$u = -1.8 \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}] = [-1.65, 1.65]$$

már nem teljesül, tehát 90%-os szignifikanciaszinten H_0-t elvetjük.

2. feladat

(a) Az összehasonlítás:

$$u = -1.8 \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}] = [-1.96, 1.96]$$

teljesül, tehát elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten.

(b) A különbség az, hogy a 90%-os szignifikanciaszinthez tartozó percentilis

$$u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1-\varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65,$$

és

$$u = -1.8 \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}] = [-1.65, 1.65]$$

már nem teljesül, tehát 90%-os szignifikanciaszinten H_0-t elvetjük.

Szokás azt is mondani, hogy az elméleti várható értéktől való eltérés 90%-os szinten szignifikáns (de 95%-os szinten már nem). Általában minél magasabb szignifikanciaszinten vetjük el H_0-t egy mintára, annál erősebben utasítjuk el H_0-t.

2. feladat

(c) Ha $\sigma = 0.3$, akkor a statisztika ezúttal

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{24.82 - 25}{0.3}\sqrt{25} = -3,$$

és

$$u = -3 \in [-u_{\varepsilon/2}, u_{\varepsilon/2}] = [-1.96, 1.96]$$

nem teljesül, tehát H_0-t 95% szignifikanciaszinten elvetjük.

4. feladat

Egy sóoldat koncentrációját mérjük. 5 mérés eredménye a következő (g/l): $7.7, 8.1, 7.7, 7.5, 7.0$. Korábban azt az információt kaptuk, hogy az oldat koncentrációja 7.2 g/l. Elfogadjuk-e ezt 95%-os szinten azon hipotézis ellenében, hogy a koncentráció nem 7.2 g/l? Mi lenne a helyzet a következő mintával:
$7.5, 7.4, 7.3, 7.4, 7.5$?

4. feladat

Egy sóoldat koncentrációját mérjük. 5 mérés eredménye a következő (g/l): $7.7, 8.1, 7.7, 7.5, 7.0$. Korábban azt az információt kaptuk, hogy az oldat koncentrációja 7.2 g/l. Elfogadjuk-e ezt 95%-os szinten azon hipotézis ellenében, hogy a koncentráció nem 7.2 g/l? Mi lenne a helyzet a következő mintával: $7.5, 7.4, 7.3, 7.4, 7.5$?

Megoldás. σ ismeretlen, ezért t-próbát végzünk; H_1 szerint $c \neq 7.2$, így egymintás, kétoldali t-próbára van szükség. A koncentrációt jelölje c.

- H_0: $c = 7.2$;
- H_1: $c \neq 7.2$.

4. feladat

A minta átlaga

$$\bar{x} = \frac{7.7 + 8.1 + 7.7 + 7.5 + 7.0}{5} = 7.6,$$

és korrigált empirikus szórása

$$(s_n^*)^2 = \frac{1}{5-1}\big((7.7-7.6)^2 + (8.1-7.6)^2 + (7.7-7.6)^2 + (7.7-7.5)^2 + (7.0-7.6)^2\big) = 0.16,$$

4. feladat

A minta átlaga

$$\bar{x} = \frac{7.7 + 8.1 + 7.7 + 7.5 + 7.0}{5} = 7.6,$$

és korrigált empirikus szórása

$$(s_n^*)^2 = \frac{1}{5-1}\left((7.7-7.6)^2 + (8.1-7.6)^2 + (7.7-7.6)^2 + (7.7-7.5)^2 + (7.0-7.6)^2\right) = 0.16,$$

tehát

$$s_n^* = 0.4,$$

és a statisztika

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{7.6-7.2}{0.4}\sqrt{5} = 2.236.$$

4. feladat

A percentilis a 95%-os kétoldali kvantilise az $n-1=4$ szabadsági fokú t-eloszlásnak:

$$t_{\varepsilon/2}=2.776.$$

4. feladat

A percentilis a 95%-os kétoldali kvantilise az $n - 1 = 4$ szabadsági fokú t-eloszlásnak:

$$t_{\varepsilon/2} = 2.776.$$

Az összehasonlítás:

$$t = 2.236 \in [-t_{\varepsilon/2}, t_{\varepsilon/2}] = [-2.776, 2.776]$$

teljesül, tehát elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten.

4. feladat

A második minta $7.5, 7.4, 7.3, 7.4, 7.5$, erre

$$\bar{x} = 7.42, \qquad s_n^* = 0.0837,$$

4. feladat

A második minta $7.5, 7.4, 7.3, 7.4, 7.5$, erre

$$\bar{x} = 7.42, \qquad s_n^* = 0.0837,$$

és a statisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{7.42 - 7.2}{0.0837}\sqrt{5} = 5.880,$$

4. feladat

A második minta $7.5, 7.4, 7.3, 7.4, 7.5$, erre

$$\bar{x} = 7.42, \qquad s_n^* = 0.0837,$$

és a statisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{7.42 - 7.2}{0.0837}\sqrt{5} = 5.880,$$

az összehasonlítás pedig

$$t = 5.880 \in [-t_{\varepsilon/2}, t_{\varepsilon/2}] = [-2.776, 2.776]$$

nem teljesül, tehát ez alapján a minta alapján elvetjük H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten.

6. feladat

Egy cég motiválni akarja az alkalmazottait a termelékenység növelése érdekében. Kétféle módszert tesztelnek: az A módszer a munkahelyi körülmények javítása, a B módszer a fizetésemelés. A termelékenység változását mind a 6 alkalmazottra megmérték mindkét módszer esetén, és a következő eredményeket kapták:

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
körülmények javítása	1.2	1.0	0.8	0.6	0.9	0.9
fizetésemelés	−0.2	0.3	3.6	1.4	−0.1	1.6

1. Teszteljük 95%-os szinten, hogy a körülmények javítása növeli-e a termelékenységet. (Mi a nullhipotézis?)
2. Teszteljük 95%-os szinten, hogy a fizetésemelés növeli-e a termelékenységet.
3. Teszteljük 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy a fizetésemelés jobban növeli a termelékenységet, mint a körülmények javítása.

6. feladat

Megoldás.

(a) Egymintás, egyoldali t-próbát végzünk a következő mintára:

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
körülmények javítása	1.2	1.0	0.8	0.6	0.9	0.9

6. feladat

Megoldás.

(a) Egymintás, egyoldali t-próbát végzünk a következő mintára:

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
körülmények javítása	1.2	1.0	0.8	0.6	0.9	0.9

Az m várható érték ismeretlen; $m = 0$-t teszteljük $m > 0$ ellenében. Mindig H_0 tartalmazza az egyenlőséget és H_1 az egyenlőtlenséget:

- H_0: $m = 0$;
- H_1: $m > 0$.

Megoldás.

(a) Egymintás, egyoldali t-próbát végzünk a következő mintára:

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
körülmények javítása	1.2	1.0	0.8	0.6	0.9	0.9

Az m várható érték ismeretlen; $m = 0$-t teszteljük $m > 0$ ellenében. Mindig H_0 tartalmazza az egyenlőséget és H_1 az egyenlőtlenséget:

- H_0: $m = 0$;
- H_1: $m > 0$.

$$\bar{x} = 0.9, \qquad s_n^* = 0.2,$$

tehát a statisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{0.9 - 0}{0.2}\sqrt{6} = 10.06.$$

6. feladat

(a) A percentilis az $n-1=5$ szabadsági fokú t-eloszlás 95%-os egyoldali kvantilise:

$$t_\varepsilon = 2.015.$$

(a) A percentilis az $n - 1 = 5$ szabadsági fokú t-eloszlás 95%-os egyoldali kvantilise:

$$t_\varepsilon = 2.015.$$

Az összehasonlítás

$$t = 10.06 \in (-\infty, t_\varepsilon] = (-\infty, 2.015)$$

nem teljesül, tehát elvetjük H_0-t H_1 ellenében 95%-os szignifikanciaszinten, és arra következtetünk, hogy a munkahelyi körülmények javítása növeli a termelékenységet.

6. feladat

(b) Az előzőhöz hasonlóan egymintás, egyoldali t-próbát végzünk a következő mintára:

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
fizetésemelés	-0.2	0.3	3.6	1.4	-0.1	1.6

6. feladat

(b) Az előzőhöz hasonlóan egymintás, egyoldali t-próbát végzünk a következő mintára:

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
fizetésemelés	-0.2	0.3	3.6	1.4	-0.1	1.6

Ismét

- H_0: $m = 0$;
- H_1: $m > 0$.

Ezúttal

$$\bar{x} = 1.1, \qquad s_n^* = 1.439,$$

tehát a statisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{1.1 - 0}{1.439}\sqrt{6} = 1.872.$$

(b) Az összehasonlítás

$$t = 1.872 \in (-\infty, t_\varepsilon] = (-\infty, 2.015)$$

most teljesül, tehát elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten, azaz a fizetésemelés nem javítja a termelékenységet szignifikánsan.

(b) Az összehasonlítás

$$t = 1.872 \in (-\infty, t_\varepsilon] = (-\infty, 2.015)$$

most teljesül, tehát elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten, azaz a fizetésemelés nem javítja a termelékenységet szignifikánsan.

Annak ellenére jutottunk erre a következtetésre, hogy $\bar{x}$ értéke magasabb a második mintára (0.9 az első és 1.1 a második mintára); ez lényegében azon múlik, hogy s_n^* értéke jóval magasabb a második mintára (0.2 illetve 1.439). Magasabb empirikus szórás mellett még a kicsit magasabb átlag is tekinthető a mintavételből származó véletlen ingadozás eredményének.

(b) Az összehasonlítás

$$t = 1.872 \in (-\infty, t_\varepsilon] = (-\infty, 2.015)$$

most teljesül, tehát elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten, azaz a fizetésemelés nem javítja a termelékenységet szignifikánsan.

Annak ellenére jutottunk erre a következtetésre, hogy $\bar{x}$ értéke magasabb a második mintára (0.9 az első és 1.1 a második mintára); ez lényegében azon múlik, hogy s_n^* értéke jóval magasabb a második mintára (0.2 illetve 1.439). Magasabb empirikus szórás mellett még a kicsit magasabb átlag is tekinthető a mintavételből származó véletlen ingadozás eredményének.

Másképpen mondva a t-próba az $\bar{x} - \mu$ eltérést a minta empirikus szórásához képest teszteli.

(c) Ezúttal a minta

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
körülmények javítása	1.2	1.0	0.8	0.6	0.9	0.9
fizetésemelés	-0.2	0.3	3.6	1.4	-0.1	1.6

Milyen próbát végezzünk?

(c) Ezúttal a minta

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
körülmények javítása	1.2	1.0	0.8	0.6	0.9	0.9
fizetésemelés	-0.2	0.3	3.6	1.4	-0.1	1.6

Milyen próbát végezzünk?

Természetes választás lenne a kétmintás t-próba, de itt lehet jobbat is: egymintás t-próba a két minta különbségére.

(c) Ezúttal a minta

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
körülmények javítása	1.2	1.0	0.8	0.6	0.9	0.9
fizetésemelés	-0.2	0.3	3.6	1.4	-0.1	1.6

Milyen próbát végezzünk?

Természetes választás lenne a kétmintás t-próba, de itt lehet jobbat is: egymintás t-próba a két minta különbségére.

Ennek oka, hogy a két minta nem két teljesen független forrásból származik, mivel ugyanazokon az alkalmazottakon teszteltünk.

6. feladat

(c) Ez behoz egy extra véletlent az alkalmazottak miatt, mi viszont erre nem vagyunk kíváncsiak, csak a két módszer összehasonlítására. Az egymintás t-próba a két minta különbségére kiejti az alkalmazottakból származó extra véletlent (amennyiben azt additív jellegűnek tételezzük fel).

6. feladat

(c) Ez behoz egy extra véletlent az alkalmazottak miatt, mi viszont erre nem vagyunk kíváncsiak, csak a két módszer összehasonlítására. Az egymintás t-próba a két minta különbségére kiejti az alkalmazottakból származó extra véletlent (amennyiben azt additív jellegűnek tételezzük fel).

Kétmintás próba használata akkor lenne indokolt, ha például a két módszert két különböző csoporton tesztelnék.

(c) Ez behoz egy extra véletlent az alkalmazottak miatt, mi viszont erre nem vagyunk kíváncsiak, csak a két módszer összehasonlítására. Az egymintás t-próba a két minta különbségére kiejti az alkalmazottakból származó extra véletlent (amennyiben azt additív jellegűnek tételezzük fel).

Kétmintás próba használata akkor lenne indokolt, ha például a két módszert két különböző csoporton tesztelnék.

A különbség minta

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
$A - B$	1.4	0.7	-2.8	-0.8	1.0	-0.7

(c) Ez behoz egy extra véletlent az alkalmazottak miatt, mi viszont erre nem vagyunk kíváncsiak, csak a két módszer összehasonlítására. Az egymintás t-próba a két minta különbségére kiejti az alkalmazottakból származó extra véletlent (amennyiben azt additív jellegűnek tételezzük fel).

Kétmintás próba használata akkor lenne indokolt, ha például a két módszert két különböző csoporton tesztelnék.

A különbség minta

alkalmazott	1	2	3	4	5	6
$A - B$	1.4	0.7	-2.8	-0.8	1.0	-0.7

- H_0: $m = 0$;
- H_1: $m > 0$.

(c)

$$\bar{x} = -0.2, \qquad s_n^* = 1.538,$$

és a statisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{-0.2 - 0}{1.538}\sqrt{6} = -0.318.$$

(c)

$$\bar{x} = -0.2, \qquad s_n^* = 1.538,$$

és a statisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{-0.2 - 0}{1.538}\sqrt{6} = -0.318.$$

A percentilis az $n - 1 = 5$ szabadsági fokú t-eloszlás 95%-os egyoldali kvantilise:

$$t_\varepsilon = 2.015.$$

(c)

$$\bar{x} = -0.2, \qquad s_n^* = 1.538,$$

és a statisztika

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_n^*}\sqrt{n} = \frac{-0.2 - 0}{1.538}\sqrt{6} = -0.318.$$

A percentilis az $n - 1 = 5$ szabadsági fokú t-eloszlás 95%-os egyoldali kvantilise:

$$t_\varepsilon = 2.015.$$

Az összehasonlítás

$$t = -0.318 \in [-\infty, t_\varepsilon) = (-\infty, 2.015]$$

teljesül, tehát elfogadjuk H_0-t 95%-os szignifikanciaszinten, és arra következtetünk, hogy a fizetésemelés nem javítja jobban a termelékenységet, mint a munkahelyi körülmények javítása.