Mintavizsga feladatok

Sztochasztika

Horváth Illés

2022/12/09

A/1. feladat

Egy bizonyos vírussal fertőzött számítógép megfertőz véletlen számú további számítógépet PGEO(1/2) eloszlással, mielőtt a vírust megtalálják rajta és kiirtják. Kezdetben a vírus csak egyetlen számítógépen van jelen.

(a) Modellezzük a vírus terjedését elágazó folyamattal. Mik az egyedek? A folyamat szubkritikus, kritikus vagy szuperkritikus?

(b) Mekkora a valószínűsége, hogy a vírus terjedése előbb-utóbb megáll?

(c) Várhatóan hány számítógépet fertőz meg a vírus az élettartama alatt?

Megoldás.

(a) Az egyedek a fertőzött gépek, és ha egy gép megfertőz egy másikat, az a közvetlen leszármazottja. PGEO(1/2) várható értéke 1, így a folyamat kritikus.

A/1. feladat

Megoldás.

(a) Az egyedek a fertőzött gépek, és ha egy gép megfertőz egy másikat, az a közvetlen leszármazottja. PGEO(1/2) várható értéke 1, így a folyamat kritikus.

(b) Kritikus folyamatra a kihalás valószínűsége 1, azaz annak a valószínűsége, hogy a vírus terjedése előbb-utóbb megáll, 1.

A/1. feladat

Megoldás.

(a) Az egyedek a fertőzött gépek, és ha egy gép megfertőz egy másikat, az a közvetlen leszármazottja. PGEO(1/2) várható értéke 1, így a folyamat kritikus.

(b) Kritikus folyamatra a kihalás valószínűsége 1, azaz annak a valószínűsége, hogy a vírus terjedése előbb-utóbb megáll, 1.

(c) Kritikus folyamat esetén $E(N) = \infty$, ahol N a teljes populáció mérete, azaz a vírus az élettartama alatt várhatóan végtelen sok számítógépet fertőz meg.

A/2. feladat

Egy tanár átlagosan 4 percet, maximum 10 percet tölt egy zárthelyi javításával. Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy 5 óra nem elég 50 zárthelyi kijavítására.

A/2. feladat

Egy tanár átlagosan 4 percet, maximum 10 percet tölt egy zárthelyi javításával. Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy 5 óra nem elég 50 zárthelyi kijavítására.

Megoldás. Jelölje X_i azt, hogy hány percet foglalkozik az i-edik zárthelyi javításával. Ekkor

$$S = X_1 + \cdots + X_n$$

a javítással töltött összes idő, ahol $N = 50$. A kérdés $\mathbb{P}(S > 300)$.

Feltesszük, hogy az X_i-k függetlenek. A feltételek alapján

$$a = 0 \leq X_i \leq 10 = b$$

és $\mathbb{E}(X_i) = 4$, ahonnan

$$\mathbb{E}(S) = N \cdot \mathbb{E}(X_i) = 50 \cdot 4 = 200.$$

Hoeffding korlát alkalmazható:

$$\mathbb{P}(S > 300) = \mathbb{P}(S > \underbrace{200}_{\mathbb{E}(S)} + \underbrace{100}_{t}) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{N(b-a)^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2 \cdot 100^2}{50(10-0)^2}\right) = \exp(-4) \approx 0.0183.$$

A/3. feladat

Egy kis üzlet parkolójában 2 autónak van hely. Átlagosan 10 percenként érkezik egy ügyfél autóval. Ha éppen van hely a parkolóban, az ügyfél leparkol és bemegy az üzletbe. Ha a parkoló tele van, az ügyfél egyből továbbhajt. Minden egyes ügyfél, aki bement az üzletbe, átlagosan 5 percet tölt bent, majd távozik.

(a) Jelölje X_t a parkolóban álló autók számát a t időpontban. Milyen feltevésekre van szükség, hogy X_t-re teljesüljön a Markov-tulajdonság? Adjuk meg a generátort.

(b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen időpontban a parkoló üres?

(c) Hosszú távon az ügyfelek mekkora része távozik amiatt, hogy tele a parkoló?

Megoldás.

(a) Ha az ügyfelek érkezési folyamata Poisson-folyamat, és az egy ügyfél által az üzletben eltöltött idő is exponenciális eloszlású (és független minden mástól), akkor teljesül a Markov tulajdonság. Az állapottér $\{0, 1, 2\}$ a parkolóban lévő autók száma szerint.

A/3. feladat

Megoldás.

(a) Ha az ügyfelek érkezési folyamata Poisson-folyamat, és az egy ügyfél által az üzletben eltöltött idő is exponenciális eloszlású (és független minden mástól), akkor teljesül a Markov tulajdonság. Az állapottér $\{0, 1, 2\}$ a parkolóban lévő autók száma szerint.

A generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -1/10 & 1/10 & 0 \\ 1/5 & -3/10 & 1/10 \\ 0 & 2/5 & -2/5 \end{bmatrix}.$$

Ha 2 ügyfél van bent, akkor külön-külön a távozási rátájuk $1/5$, így annak a rátája, hogy bármelyik távozik (ez felel meg a $2 \to 1$ átmenetnek), $2/5$.

(b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen időpontban a parkoló üres? Kiszámítjuk a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\ x_1\ x_2)$ stacionárius eloszlást. Ez egy Markov-sor, így teljesülnek az egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{1}{10}x_0 = \frac{1}{5}x_1, \qquad \frac{1}{10}x_1 = \frac{2}{5}x_2, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

(b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen időpontban a parkoló üres? Kiszámítjuk a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1\, x_2)$ stacionárius eloszlást. Ez egy Markov-sor, így teljesülnek az egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{1}{10}x_0 = \frac{1}{5}x_1, \qquad \frac{1}{10}x_1 = \frac{2}{5}x_2, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

ahonnan $x_0 : x_1 : x_2 = 8 : 4 : 1$, így $v_{\mathrm{st}} = (8/13\, 4/13\, 1/13)$, és egy véletlen időpontban a parkoló $8/13$ valószínűséggel üres.

A/3. feladat

(b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen időpontban a parkoló üres? Kiszámítjuk a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1\, x_2)$ stacionárius eloszlást. Ez egy Markov-sor, így teljesülnek az egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{1}{10}x_0 = \frac{1}{5}x_1, \qquad \frac{1}{10}x_1 = \frac{2}{5}x_2, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

ahonnan $x_0 : x_1 : x_2 = 8 : 4 : 1$, így $v_{\mathrm{st}} = (8/13\, 4/13\, 1/13)$, és egy véletlen időpontban a parkoló 8/13 valószínűséggel üres.

(c) Hosszú távon az ügyfelek mekkora része távozik amiatt, hogy tele a parkoló?

(b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen időpontban a parkoló üres? Kiszámítjuk a $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1\, x_2)$ stacionárius eloszlást. Ez egy Markov-sor, így teljesülnek az egyensúlyi egyenletek:

$$\frac{1}{10}x_0 = \frac{1}{5}x_1, \qquad \frac{1}{10}x_1 = \frac{2}{5}x_2, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

ahonnan $x_0 : x_1 : x_2 = 8 : 4 : 1$, így $v_{\mathrm{st}} = (8/13\, 4/13\, 1/13)$, és egy véletlen időpontban a parkoló 8/13 valószínűséggel üres.

(c) Hosszú távon az ügyfelek mekkora része távozik amiatt, hogy tele a parkoló? A parkoló az idő 1/13 részében van tele, így hosszú távon az ügyfeleknek is az 1/13 része távozik tele parkoló miatt.

A/4. feladat

Béla egy építkezésen dolgozik, és az ideje p részét cigiszünetekkel tölti. A héten 10 különböző véletlen időpontban elhaladtunk az építkezés mellett, és ebből Bélát 3-szor láttuk cigizni. Adjunk ez alapján momentum-becslést p értékére.

A/4. feladat

Béla egy építkezésen dolgozik, és az ideje p részét cigiszünetekkel tölti. A héten 10 különböző véletlen időpontban elhaladtunk az építkezés mellett, és ebből Bélát 3-szor láttuk cigizni. Adjunk ez alapján momentum-becslést p értékére.

Megoldás. Béla 10 különböző időpont mindegyikében p valószínűséggel cigizik, függetlenül a többi időponttól. Jelölje X azt, hogy hányszor cigizik, ekkor X eloszlása BIN(10,p), a konkrét 1 elemű minta pedig $x = 3$.

A/4. feladat

Béla egy építkezésen dolgozik, és az ideje p részét cigiszünetekkel tölti. A héten 10 különböző véletlen időpontban elhaladtunk az építkezés mellett, és ebből Bélát 3-szor láttuk cigizni. Adjunk ez alapján momentum-becslést p értékére.

Megoldás. Béla 10 különböző időpont mindegyikében p valószínűséggel cigizik, függetlenül a többi időponttól. Jelölje X azt, hogy hányszor cigizik, ekkor X eloszlása BIN(10,p), a konkrét 1 elemű minta pedig $x = 3$.

$$g(p) = \mathbb{E}_p(X) = 10p,$$

így

$$g^{-1}(x) = x/10,$$

és a momentum-becslés

$$g^{-1} = (\bar{x}) = g^{-1}(x) = 0.3.$$

A/5. feladat

Magyarországon a felnőtt nők magasságának átlaga 164 cm, szórása 9 cm. Tihamér azt állítja, hogy a szülőfalujában a nők magasabbak az átlagosnál. Ennek tesztelésére megmérjük 25 felnőtt nő magasságát a faluból, és az átlagra 171 cm-t kapunk. Teszteljük 95%-os konfidenciaszinten azt a hipotézist, hogy Tihamér szülőfalujában a nők átlagos magassága megegyezik az országos átlaggal, azon hipotézis ellenében, hogy Tihamér szülőfalujában a nők átlagos magassága nagyobb az országos átlagnál.

A/5. feladat

Magyarországon a felnőtt nők magasságának átlaga 164 cm, szórása 9 cm. Tihamér azt állítja, hogy a szülőfalujában a nők magasabbak az átlagosnál. Ennek tesztelésére megmérjük 25 felnőtt nő magasságát a faluból, és az átlagra 171 cm-t kapunk. Teszteljük 95%-os konfidenciaszinten azt a hipotézist, hogy Tihamér szülőfalujában a nők átlagos magassága megegyezik az országos átlaggal, azon hipotézis ellenében, hogy Tihamér szülőfalujában a nők átlagos magassága nagyobb az országos átlagnál.

Megoldás. A várható értéket teszteljük; a próba, amit végzünk:

- u-próba, mivel ismert a szórás;
- egymintás, mivel a minta várható értékét teszteljük ismert érték ellen;
- egyoldali, mivel az ellenhipotézis az, hogy a faluban magasabb az átlag.

A/5. feladat

A szórás $\sigma = 9$, a várható érték m ismeretlen. A hipotézis és ellenhipotézis:

- H_0: $m = 164$;
- H_1: $m > 164$.

A/5. feladat

A szórás $\sigma = 9$, a várható érték m ismeretlen. A hipotézis és ellenhipotézis:

- H_0: $m = 164$;
- H_1: $m > 164$.

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{171 - 164}{9}\sqrt{25} \approx 4.889.$$

A/5. feladat

A szórás $\sigma = 9$, a várható érték m ismeretlen. A hipotézis és ellenhipotézis:

- H_0: $m = 164$;
- H_1: $m > 164$.

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{171 - 164}{9}\sqrt{25} \approx 4.889.$$

Kiszámítjuk a kvantilist. A konfidenciaszint 95%, így $\varepsilon = 0.95$, és

$$u_\varepsilon = 1.65.$$

A/5. feladat

A szórás $\sigma = 9$, a várható érték m ismeretlen. A hipotézis és ellenhipotézis:

- H_0: $m = 164$;
- H_1: $m > 164$.

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{171 - 164}{9}\sqrt{25} \approx 4.889.$$

Kiszámítjuk a kvantilist. A konfidenciaszint 95%, így $\varepsilon = 0.95$, és

$$u_\varepsilon = 1.65.$$

A próba:

$$u = 4.889 \in (-\infty, u_\varepsilon] = (-\infty, 1.65]$$

nem teljesül, így elvetjük H_0-t és H_1-et fogadjuk el, ami szerint Tihamér falujában a nők magasabbak az átlagosnál.

B/2. feladat

Teri néni két ismerősével szokott telefonon beszélni, a nővérével és a barátnőjével. A nővérével átlagosan hetente kétszer telefonál, a barátnőjével átlagosan hetente háromszor.

(a) Mekkora a valószínűsége, hogy Teri néni a hétvége folyamán nem telefonál?

(b) Teri néni minden pletykát, amit hall, az első adandó alkalommal továbbad. Hétfő délben hall a nővérétől egy pletykát; mekkora az esélye, hogy péntek délig még nem mondta el a barátnőjének?

(c) Mekkora a valószínűsége, hogy a következő két telefonbeszélgetése két különböző partnerrel zajlik?

B/2. feladat

Megoldás.

(a) Az összes telefonhívás együtt Poisson-folyamatot alkot 5 hívás per hét rátával. Legyen X az egy hétvégére eső hívások száma, ekkor $X \sim \mathrm{POI}(5 \cdot 2/7 = 10/7)$, és így

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{(10/7)^0}{0!} e^{-10/7} \approx 0.240.$$

B/2. feladat

Megoldás.

(a) Az összes telefonhívás együtt Poisson-folyamatot alkot 5 hívás per hét rátával. Legyen X az egy hétvégére eső hívások száma, ekkor $X \sim \mathrm{POI}(5 \cdot 2/7 = 10/7)$, és így

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{(10/7)^0}{0!} e^{-10/7} \approx 0.240.$$

(b) A barátnőjével bonyolított hívások Poisson-folyamatot alkotnak 3 hívás per hét rátával. Legyen Y a hétfő déltől péntek délig a barátnőjével bonyolított hívások száma, ekkor $Y \sim \mathrm{POI}(3 \cdot 4/7 = 12/7)$, és így

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{(12/7)^0}{0!} e^{-12/7} \approx 0.180.$$

(c) Minden egyes telefonhívás $2/5$ valószínűséggel történik a nővérével és $3/5$ valószínűséggel a barátnőjével. Az, hogy a következő két telefonbeszélgetése két különböző partnerrel zajlik, két módon lehetséges:

- előbb a barátnőjével, aztán a nővérével, ennek esélye $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$;
- vagy előbb a nővérével, aztán a barátnőjével, ennek esélye $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$,

összesen a kérdéses valószínűség $12/25 = 0.48$.

B/2. feladat

(c) Minden egyes telefonhívás 2/5 valószínűséggel történik a nővérével és 3/5 valószínűséggel a barátnőjével. Az, hogy a következő két telefonbeszélgetése két különböző partnerrel zajlik, két módon lehetséges:

- előbb a barátnőjével, aztán a nővérével, ennek esélye $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$;
- vagy előbb a nővérével, aztán a barátnőjével, ennek esélye $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$,

összesen a kérdéses valószínűség $12/25 = 0.48$.

Ugyanez picit másképp: legyen a következő 2 hívásból a nővérével bonyolítottak száma X, ekkor $X \sim \mathrm{BIN}(2, 2/5)$, és a kérdéses valószínűség

$$\mathbb{P}(X = 1) = \binom{2}{1} \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25}.$$

B/3. feladat

Egy atlétikai versenyen 400 részvevő indul. Korábbi tapasztalatok alapján tudjuk, hogy a verseny alatt egy részvevő vízfogyasztásának várható értéke 2 liter, szórása 1 liter. Mennyi vizet biztosítsanak a szervezők a versenyre, ha azt szeretnék, hogy 99% valószínűséggel elég legyen a versenyzőknek?

B/3. feladat

Egy atlétikai versenyen 400 részvevő indul. Korábbi tapasztalatok alapján tudjuk, hogy a verseny alatt egy részvevő vízfogyasztásának várható értéke 2 liter, szórása 1 liter. Mennyi vizet biztosítsanak a szervezők a versenyre, ha azt szeretnék, hogy 99% valószínűséggel elég legyen a versenyzőknek?

Megoldás. Jelölje X_i azt, hogy az i-edik mennyi vizet fogyaszt. Ekkor az összfogyasztás $S = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 400$. Olyan C értékre szeretnénk becslést adni, amelyre $\mathbb{P}(S \leq C) = 0.99$.

B/3. feladat

Egy atlétikai versenyen 400 részvevő indul. Korábbi tapasztalatok alapján tudjuk, hogy a verseny alatt egy részvevő vízfogyasztásának várható értéke 2 liter, szórása 1 liter. Mennyi vizet biztosítsanak a szervezők a versenyre, ha azt szeretnék, hogy 99% valószínűséggel elég legyen a versenyzőknek?

Megoldás. Jelölje X_i azt, hogy az i-edik mennyi vizet fogyaszt. Ekkor az összfogyasztás $S = X_1 + \cdots + X_n$, ahol $n = 400$. Olyan C értékre szeretnénk becslést adni, amelyre $\mathbb{P}(S \leq C) = 0.99$. Tegyük fel, hogy a versenyzők fogyasztása független és azonos eloszlású,

$$\mathbb{E}(X_i) = 2, \qquad \mathbb{D}(X_i) = 1.$$

B/3. feladat

1%-os valószínűség becslésére alkalmazható a CHT:

$$\mathbb{P}(S \le C) = \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

B/3. feladat

1%-os valószínűség becslésére alkalmazható a CHT:

$$\mathbb{P}(S \leq C) = \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

A jobboldalt egyenlővé tesszük 0.99-dal, ahonnan a standard normális eloszlás táblázatából

$$\frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}} = 2.33,$$

B/3. feladat

1%-os valószínűség becslésére alkalmazható a CHT:

$$\mathbb{P}(S \leq C) = \mathbb{P}\left(\frac{S - nm}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

A jobboldalt egyenlővé tesszük 0.99-dal, ahonnan a standard normális eloszlás táblázatából

$$\frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}} = 2.33,$$

ahonnan

$$C = nm + 2.33\sigma\sqrt{n} = 400 \cdot 2 + 2.33 \cdot 1 \cdot \sqrt{400} \approx 847$$

liter vizet érdemes biztosítani.

B/4. feladat

Egy önkiszolgáló fénymásológéphez óránként átlagosan 5 ügyfél érkezik. Ha egy ügyfél éppen szabadon találja a gépet, akkor elkezdi használni, de ha olyankor érkezik, amikor valaki más éppen használja a gépet, akkor továbbmegy és nem tér vissza. A gép 10 oldal per perc sebességgel fénymásol. Egy ügyfél átlagosan 80 oldalt akar fénymásolni egyszerre.

(a) Modellezzük a gépet folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok, és milyen feltevésekre van szükség ahhoz, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Adjuk meg a generátort.

(b) Hosszú távon az idő mekkora részében szabad a fénymásológép?

(c) Egy oldal fénymásolása 20 forint hasznot hoz a gép üzemeltetőjének. Hosszú távon átlagosan mennyi hasznot termel a gép óránként?

B/4. feladat

(a) Két állapot van aszerint, hogy a gép szabad vagy foglalt. Ha az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek, és az egy ügyfél által fénymásolandó mennyiség exponenciális eloszlású, akkor a gép állapotára teljesül a Markov-tulajdonság.

B/4. feladat

(a) Két állapot van aszerint, hogy a gép szabad vagy foglalt. Ha az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek, és az egy ügyfél által fénymásolandó mennyiség exponenciális eloszlású, akkor a gép állapotára teljesül a Markov-tulajdonság.

Az idő mértékegysége legyen perc. Ekkor a generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 7.5 & 7.5 \end{bmatrix},$$

mivel átlagosan 5 ügyfél érkezik óránként, és egy ügyfél által a gépnél töltött idő várható értéke 8 perc, ami $8/60$ óra, a befejezési ráta ennek reciproka, ami $60/8 = 7.5$.

(b) Kiszámoljuk a stacionárius eloszlást. $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1)$-re

$$-5x_1 + 7.5x_2 = 0, \qquad 5x_1 - 7.5x_2 = 0, \qquad x_1 + x_2 = 1$$

alapján $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2) = (0.6\, 0.4)$, így az idő 60%-ában szabad a fénymásológép.

B/4. feladat

(b) Kiszámoljuk a stacionárius eloszlást. $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1)$-re

$$-5x_1 + 7.5x_2 = 0, \qquad 5x_1 - 7.5x_2 = 0, \qquad x_1 + x_2 = 1$$

alapján $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2) = (0.6\, 0.4)$, így az idő 60%-ában szabad a fénymásológép.

(c) Amíg a gép megy, addig oldalanként 20 forintot, vagyis percenként 200 forintot, vagyis óránként 12000 forint hasznot hoz a gép üzemeltetőjének. Amíg nem megy, addig 0-t.

(b) Kiszámoljuk a stacionárius eloszlást. $v_{\mathrm{st}} = (x_0\, x_1)$-re

$$-5x_1 + 7.5x_2 = 0, \qquad 5x_1 - 7.5x_2 = 0, \qquad x_1 + x_2 = 1$$

alapján $v_{\mathrm{st}} = (x_1\, x_2) = (0.6\, 0.4)$, így az idő 60%-ában szabad a fénymásológép.

(c) Amíg a gép megy, addig oldalanként 20 forintot, vagyis percenként 200 forintot, vagyis óránként 12000 forint hasznot hoz a gép üzemeltetőjének. Amíg nem megy, addig 0-t.

Az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos óránkénti haszon

$$0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 12000 = 4800$$

forint.

B/5. feladat

Szeretnénk tesztelni, hogy egy hatoldalú dobókocka szabályos-e. Ehhez dobtunk vele 200-szor, az eredmény:

érték	1	2	3	4	5	6
darab	41	29	35	30	39	26

Döntsünk 95%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy a dobókocka minden lapjára egyforma eséllyel esik, azon hipotézis ellenében, hogy nem.

B/5. feladat

Szeretnénk tesztelni, hogy egy hatoldalú dobókocka szabályos-e. Ehhez dobtunk vele 200-szor, az eredmény:

érték	1	2	3	4	5	6
darab	41	29	35	30	39	26

Döntsünk 95%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy a dobókocka minden lapjára egyforma eséllyel esik, azon hipotézis ellenében, hogy nem.

Megoldás. Illeszkedésvizsgálatot végzünk, az elméleti háttéreloszlás

érték	1	2	3	4	5	6
valószínűség	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

A kategóriak száma $r = 6$, a minta mérete $n = 200$.

B/5. feladat

A hipotézis és ellenhipotézis:

- H_0: a minta az elméleti háttéreloszlásból származik;
- H_1: a minta nem az elméleti háttéreloszlásból származik.

B/5. feladat

A hipotézis és ellenhipotézis:

- H_0: a minta az elméleti háttéreloszlásból származik;
- H_1: a minta nem az elméleti háttéreloszlásból származik.

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$\begin{aligned}\chi^2 =& \frac{(41 - 200 \cdot 1/6)^2}{200 \cdot 1/6} + \frac{(29 - 200 \cdot 1/6)^2}{200 \cdot 1/6} + \\ & \frac{(35 - 200 \cdot 1/6)^2}{200 \cdot 1/6} + \frac{(30 - 200 \cdot 1/6)^2}{200 \cdot 1/6} + \\ & \frac{(39 - 200 \cdot 1/6)^2}{200 \cdot 1/6} + \frac{(26 - 200 \cdot 1/6)^2}{200 \cdot 1/6} = 5.32.\end{aligned}$$

B/5. feladat

Meghatározzuk a kvantilist a χ^2 eloszlás táblázatából. A $r - 1 = 5$ szabadsági fokú χ^2 eloszlás 95%-os konfidenciaszinthez tartozó kvantilise

$$\chi_\varepsilon^2 = 9.49.$$

B/5. feladat

Meghatározzuk a kvantilist a χ^2 eloszlás táblázatából. A $r-1=5$ szabadsági fokú χ^2 eloszlás 95%-os konfidenciaszinthez tartozó kvantilise

$$\chi^2_\varepsilon = 9.49.$$

A próba:

$$\chi^2 = 5.32 < \chi^2_\varepsilon = 9.49$$

teljesül, így elfogadjuk H_0-t, ami szerint a dobókocka szabályos.

C/1. feladat

Van két érménk, az egyik szabályos, a másiknak viszont mindkét oldalán fej van. Találomra választunk egy érmét, majd feldobjuk háromszor.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom dobás fej?

(b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej, mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos érmével dobtunk?

C/1. feladat

Van két érménk, az egyik szabályos, a másiknak viszont mindkét oldalán fej van. Találomra választunk egy érmét, majd feldobjuk háromszor.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom dobás fej?

(b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej, mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos érmével dobtunk?

Megoldás. Definiáljuk a következő eseményeket:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{mindhárom dobás fej}\}, \\ B_1 &= \{\text{a szabályos érmét választottuk}\}, \\ B_2 &= \{\text{a dupla fejes érmét választottuk}\}. \end{aligned}$$

C/1. feladat

A megadott információk alapján

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = 1/2$$

mivel találomra választunk érmét,

C/1. feladat

A megadott információk alapján

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = 1/2$$

mivel találomra választunk érmét, továbbá

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad \mathbb{P}(A|B_2) = 1.$$

C/1. feladat

A megadott információk alapján

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = 1/2$$

mivel találomra választunk érmét, továbbá

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad \mathbb{P}(A|B_2) = 1.$$

Teljes valószínűség alapján

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{9}{16}.$$

C/1. feladat

A megadott információk alapján

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = 1/2$$

mivel találomra választunk érmét, továbbá

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad \mathbb{P}(A|B_2) = 1.$$

Teljes valószínűség alapján

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A|B_2)\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{9}{16}.$$

$\mathbb{P}(B_1|A)$ Bayes-tétel segítségével számítható ki:

$$\mathbb{P}(B_1|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_1)\mathbb{P}(B_1)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{9}.$$

C/2. feladat

Egy orvos átlagosan 5 percet, maximum 15 percet foglalkozik egy betegével. Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy egy 4 órás rendelési idő nem elég 25 betegre.

Egy orvos átlagosan 5 percet, maximum 15 percet foglalkozik egy betegével. Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy egy 4 órás rendelési idő nem elég 25 betegre.

Megoldás. Legyen az i-edik betegre fordított idő X_i (percben), ekkor $S = X_1 + \cdots + X_n$ az összes betegre fordított idő, ahol $n = 25$. A kérdés $\mathbb{P}(S > 240)$.

C/2. feladat

Egy orvos átlagosan 5 percet, maximum 15 percet foglalkozik egy betegével. Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy egy 4 órás rendelési idő nem elég 25 betegre.

Megoldás. Legyen az i-edik betegre fordított idő X_i (percben), ekkor $S = X_1 + \cdots + X_n$ az összes betegre fordított idő, ahol $n = 25$. A kérdés $\mathbb{P}(S > 240)$.

A feltétel szerint $\mathbb{E}(X_i) = 5$ és $a = 0 \le X_i \le 15 = b$; Hoeffding-korlátot alkalmazunk:

$$\mathbb{P}(S > 240) = \mathbb{P}(S > \underbrace{125}_{\mathbb{E}(S)} + \underbrace{115}_{t}) \le e^{-\frac{2 \cdot 115^2}{25 \cdot (15-0)^2}} \approx 0.0091.$$

C/3. feladat

Egy vásáron az arcfestő művész kétféle mintát fest: tigrist vagy pillangót. Egy tigrist 10 perc alatt fest meg, egy pillangót 20 perc alatt. Minden egyes gyerek a többiektől függetlenül 2/3 eséllyel tigrist kér, 1/3 eséllyel pillangót. Hosszú sorban állnak a gyerekek, az arcfestő folyamatosan dolgozik.

(a) Modellezzük az arcfestő tevékenységét diszkrét idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az átmenet-valószínűség mátrixot.

(b) Hosszú távon az idő mekkora részét tölti tigris festésével?

(c) Az arcfestő egy tigrisért 1800 forintot kér, egy pillangóért 1200 forintot. Mennyi a hosszú távú átlagos bevétele *óránként*?

Megoldás.

(a) Az állapotok T, P1, P2, ahol az időegység 10 perc, és T jelöli azt, hogy az adott 10 perces időszakban tigrist fest, P1 azt, hogy egy pillangó első felét, P2 azt, hogy egy pillangó második felét. Az átmenet-valószínűség mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

C/3. feladat

Kiszámoljuk a stacionárius eloszlást:

$$2/3x_1+2/3x_3 = x_1, \quad 1/3x_1+1/3x_3 = x_2, \quad x_2 = x_3, \quad x_1+x_2+x_3 = 1,$$

ahonnan

$$v_{\mathrm{st}} = (x_1\ x_2\ x_3) = (0.5\ 0.25\ 0.25).$$

Az állapotoknak hosszú távon a fele T, tehát az idő felét tölti tigris festésével.

C/3. feladat

Kiszámoljuk a stacionárius eloszlást:

$$2/3x_1+2/3x_3 = x_1, \quad 1/3x_1+1/3x_3 = x_2, \quad x_2 = x_3, \quad x_1+x_2+x_3 = 1,$$

ahonnan

$$v_{\mathrm{st}} = (x_1\ x_2\ x_3) = (0.5\ 0.25\ 0.25).$$

Az állapotoknak hosszú távon a fele T, tehát az idő felét tölti tigris festésével.

Az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos bevétele 10 perces időegységenként (a pillangó 1800 forintos árát kettéosztva a P1 és P2 állapotok között)

$$0.5 \cdot 1200 + 0.25 \cdot 1800 + 0.25 \cdot 0 = 1050,$$

óránként pedig $6 \cdot 1050 = 6300$ (forint).

A vevők sorbanállnak egy fagyiárusnál. Az árus egyszerre egy vevőt szolgál ki, a többiek addig sorbanállnak. Ha a sor hossza (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is) legalább 3 fő, a további érkezők azonnal továbbmennek (pl. egy másik fagyiárushoz). A vevők átlagosan 2 percenként érkeznek, és egy vevő kiszolgálása átlagosan 1 percig tart.

(a) Mit kell feltenni, hogy a sor hossza folytonos idejű Markov-lánc legyen? Írjuk fel a generátort.

(b) Átlagosan hány vevő áll sorban?

(c) Átlagosan mennyi időt tölt egy vevő a fagyiárusnál (beleértve a sorbanállást és a kiszolgálást is)?

Megoldás.

(a) Az állapotok 0, 1, 2 vagy 3 aszerint, hogy hányan állnak sorban. Ha az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor az érkezési időközök EXP(1/2) eloszlásúak. A kiszolgálási időről csak annyi van megadva, hogy átlagosan 1 perc. Tegyük fel erről is, hogy exponenciális eloszlású, ekkor a rátája 1 kell legyen, és a folyamatra teljesül a Markov-tulajdonság.

Megoldás.

(a) Az állapotok 0, 1, 2 vagy 3 aszerint, hogy hányan állnak sorban. Ha az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor az érkezési időközök EXP(1/2) eloszlásúak. A kiszolgálási időről csak annyi van megadva, hogy átlagosan 1 perc. Tegyük fel erről is, hogy exponenciális eloszlású, ekkor a rátája 1 kell legyen, és a folyamatra teljesül a Markov-tulajdonság.

A generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Ki kell számítanunk a stacionárius eloszlást. Ez egy Markov-sor, teljesülnek a dinamikus egyensúly egyenletek:

$$\frac{1}{2} \cdot x_0 = 1 \cdot x_1, \qquad \frac{1}{2} \cdot x_1 = 1 \cdot x_2,$$
$$\frac{1}{2} \cdot x_2 = 1 \cdot x_3, \qquad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

ahonnan $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = 8 : 4 : 2 : 1$, és

$$v_{\mathrm{st}} = (x_0\; x_1\; x_2\; x_3) = \left(\frac{8}{15}\; \frac{4}{15}\; \frac{2}{15}\; \frac{1}{15} \right).$$

Az ergodtétel alapján az átlagos sorhossz

$$0 \cdot \frac{8}{15} + 1 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} + 3 \cdot \frac{1}{15} = \frac{11}{15} \approx 0.733.$$

(c) A Little-formulát szeretnénk használni. Az átlagos sorhossz $L = \frac{11}{15}$ a (b) rész alapján. Az effektív érkezési ráta

$$\lambda_e = \frac{14}{15}\lambda = \frac{7}{15}$$

(vevő per perc), mivel ha legalább 3 fős a sor, akkor további vevők nem állnak be. Így a Little formula szerint egy vevő átlagos fagyisnál eltöltött ideje

$$W = L/\lambda_e = \frac{11}{7} \approx 1.57$$

perc.

C/5. feladat

Egy kábelen haladó áram feszültségét csak hibával terhelten tudjuk mérni, a mérési eredménynek a szórása 0.1V. 6 mérés eredményére a következő adódott (voltban): 8.86, 8.92, 8.85, 8.93, 8.95, 8.89. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a feszültség 9V azon hipotézis ellenében, hogy a feszültség kevesebb, mint 9V.

C/5. feladat

Egy kábelen haladó áram feszültségét csak hibával terhelten tudjuk mérni, a mérési eredménynek a szórása 0.1V. 6 mérés eredményére a következő adódott (voltban): 8.86, 8.92, 8.85, 8.93, 8.95, 8.89. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a feszültség 9V azon hipotézis ellenében, hogy a feszültség kevesebb, mint 9V.

Megoldás.

- σ ismert, tehát u-próbát alkalmazunk;
- egy minta várható értékét teszteljük egy rögzített érték ellen, tehát egymintás u-próba;
- H_1-ben $\mu < 9$ szerepel, tehát egyoldali egymintás u-próba.

A nullhipotézis és ellenhipotézis:

- H_0: a várható érték $m = 9$;
- H_1: a várható érték $m < 9$.

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{8.9 - 9}{0.1}\sqrt{6} = -2.45.$$

Kiszámítjuk a statisztikát:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{8.9 - 9}{0.1}\sqrt{6} = -2.45.$$

Kiszámítjuk a percentilist:

$$u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon) = \Phi^{-1}(0.95) = 1.65.$$

Az összehasonlítás:

$$u = -2.45 \in [-u_\varepsilon, \infty) = [-1.65, \infty)$$

nem teljesül, tehát H_0-t elutasítjuk 95%-os szignifikanciaszinten.

F/4. feladat

Egy kis nyelviskolában 3 nyelvtanár tanít, akik néha betegek. Minden egyes tanár átlagosan 2 havonta betegszik meg (a többiektől függetlenül), és egy betegség átlagosan 10 napig tart. (1 hónapot tekintsünk 30 napnak.)

(a) Jelölje X(t) az egészséges tanárok számát a t időpontban. Mit kell feltenni, hogy X(t) folytonos idejű Markov-lánc legyen? Mik a lehetséges állapotok? Írjuk fel a generátort.

(b) Átlagosan hány tanár egészséges?

(c) Most 1 tanár beteg. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 2 nap múlva minden tanár egészséges.

F/4. feladat

(a) Az állapotok $0, 1, 2, 3$ aszerint, hogy hány tanár egészséges. Ha feltesszük, hogy minden egyes tanár Poisson-folyamat szerint betegszik meg a többiektől függetlenül, és a betegségek hossza exponenciális eloszlású, akkor a folyamat folytonos idejű Markov-lánc.

F/4. feladat

(a) Az állapotok $0, 1, 2, 3$ aszerint, hogy hány tanár egészséges. Ha feltesszük, hogy minden egyes tanár Poisson-folyamat szerint betegszik meg a többiektől függetlenül, és a betegségek hossza exponenciális eloszlású, akkor a folyamat folytonos idejű Markov-lánc.

A generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 3 & -3/2 & 2/2 & 0 \\ 0 & 6 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{bmatrix},$$

mivel egy tanár megbetegedési rátája $1/2$, de ezt meg kell szorozni az egészséges tanárok számával, hogy megkapjuk a teljes megbetegedési rátát. A gyógyulással is ugyanez a helyzet.