Sztochasztika
2. feladatsor - Generátorfüggvények
2024. ősz

1. Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye
$$G(z) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3.$$
Határozzuk meg az eloszlását (azaz a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségeket). Határozzuk meg X várható értékét és szórását is.

2. Adjunk meg két olyan hatoldalú X és Y dobókockát, melyek nem cinkeltek (azaz minden oldalukra egyforma eséllyel esnek), az oldalaikon pozitív egészek állnak, és $X + Y$ eloszlása pont ugyanaz, mint szokásos (1-től 6-ig számozott) hatoldalú dobókockával két dobás összege, de X és Y nem a szokásos dobókockák.

3. Anna levelet küld Bélának. A posta megbízhatatlan; minden egyes napon 1/3 eséllyel viszi be a levelet a postás a központba, az előzményektől függetlenül. Ha a levél beért a központba, minden egyes napon 1/5 eséllyel feldolgozzák, az előzményektől függetlenül. Ha feldolgozták, onnan a kézbesítés fix 1 napot vesz igénybe. (Tehát legjobb esetben 1 nap alatt kézbesítik is a levelet.) Jelölje X azt, hogy a feladástól számítva hány nap alatt kézbesítik a levelet. Számítsuk ki X generátorfüggvényét és várható értékét.

4. (a) Jelölje X egy szabályos kockával az első 6-osig szükséges dobások számát. Határozzuk meg X generátorfüggvényét kétféle módon is: egyrészt közvetlenül az eloszlásából, másrészt teljes várható érték tétellel.
   (b) Egy szabályos hatoldalú dobókockával dobálunk. Jelölje Y az ahhoz szükséges dobások számát, hogy két 6-os jöjjön egymás után (tehát pl. a 6134622665 sorozat esetén $Y = 9$). Számítsuk ki Y generátorfüggvényét.

5. Egy társasjátékban a soron következő játékos egy szabályos 6-oldalú kockával gurít. Minden 6-os dobásért még kétszer guríthat, minden 5-ös dobásért pedig még egyszer. Más eredmény esetén nem jár extra dobás. Amikor végzett, továbbadja a kockát a következő játékosnak.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy játékos végtelen sokszor gurít anélkül, hogy közben továbbadná a kockát?
   (b) Számítsuk ki az egy játékos által egyhuzamban elvégzett dobások számának várható értékét. Számítsuk ki a generátorfüggvényét is.
   (c) Számítsuk ki az egy játékos által egyhuzamban elvégzett dobások összegének várható értékét. Számítsuk ki a generátorfüggvényét is.

6. (a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$. Gondoljuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = F^n(x)$.
   (b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$. Legyen N ezektől független, pozitív egész értékű valószínűségi változó. Jelölje N *generátorfüggvényét* $G(z)$. Mutassuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.
   (c) Egy vetélkedőn 3-5 fős csapatok vesznek részt. Egy csapat minden tagjának háromszor kell dobnia egy labdával, és a csapat eredménye ezen dobások közül a legnagyobb. A versenyen minden résztvevő egyformán jól dob, egy dobás nagyságának sűrűségfüggvénye (méterben):
   $$f(x) = \frac{50}{3x^2}, \quad 10 \le x \le 25$$
   A versenyen ugyanannyi 3, 4 illetve 5 fős csapat van. Találomra kiválasztunk egy csapatot. Mi az eredményük eloszlásfüggvénye?

7. Egy vizsga A és B részből áll. A B részen csak azok a diákok vehetnek részt, akik az A részen átmentek. Minden egyes diák $0,6$ valószínűséggel megy át az A részen (a többiektől függetlenül). Minden diák, aki átment az A részen, $0,5$ valószínűséggel megy át a B részen (újfent a többiektől függetlenül). 100 diák vesz részt a vizsgán. Jelölje X azok számát, akik átmentek az A részen, Y pedig azok számát, akik átmentek mindkét részen. Milyen eloszlású X? Számítsuk ki G_X-et (X generátorfüggvényét), majd ennek segítségével G_Y-t is. G_Y-ból mondjuk meg Y eloszlását.