Sztochasztika
2. feladatsor - Generátorfüggvények, megoldások
2023. ősz

5. Egy társasjátékban a soron következő játékos egy szabályos 6-oldalú kockával gurít. Minden 6-os dobásért még kétszer guríthat, minden 5-ös dobásért pedig még egyszer. Más eredmény esetén nem jár extra dobás. Amikor végzett, továbbadja a kockát a következő játékosnak.

   (a) Mi a valószínűsége, hogy egy játékos végtelen sokszor gurít anélkül, hogy közben továbbadná a kockát?

   (b) Számítsuk ki az egy játékos által egyhuzamban elvégzett dobások számának várható értékét. Számítsuk ki a generátorfüggvényét is.

   (c) Számítsuk ki az egy játékos által egyhuzamban elvégzett dobások összegének várható értékét. Számítsuk ki a generátorfüggvényét is.

Megoldás.

(a+b) Legyen X az egy játékos által egy huzamban elvégzett gurítások száma. X diszkrét, esetleg végtelen értékű valószínűségi változó. Legyen a generátorfüggvénye $G(z)$. Amiatt, hogy X potenciálisan lehet végtelen is, lehetséges, hogy $G(z)$ hiányos generátorfüggvény, így még csak annyit tudunk, hogy $G(1) \leq 1$. Kiszámítjuk $G(z)$-t.

Teljes várható érték tételt alkalmazunk a generátorfüggvényre az első dobás értéke szerint. Mindenképpen dobunk egyet, ennek az egy dobásnak a generátorfüggvénye z^1. Ezután 3 eset lehetséges:

- ha az első dobás 1, 2, 3 vagy 4 (ennek valószínűsége $\frac{4}{6}$), akkor többet nem dobunk, a 0 dobás generátorfüggvénye $z^0 = 1$;
- ha az első dobás 5, akkor még egyszer guríthat; a további dobások számának generátorfüggvénye $G(z)$;
- ha az első dobás 6, akkor még kétszer guríthat; mindkettő adag plusz dobás generátorfüggvénye $G(z)$, összesen pedig $G^2(z)$.

Ez alapján

$$G(z) = z\left(\frac{4}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot G(z) + \frac{1}{6}\cdot G^2(z)\right),$$

ami egy másodfokú egyenlet $G(z)$-re, a megoldásai

$$G(z) = \frac{6 - z \pm \sqrt{36 - 12z - 15z^2}}{2z}.$$

El kell döntenünk, hogy a (+) vagy a (−)-os a valódi megoldás. Ezt $G(0)$ értéke alapján döntjük el; $G(0) = 0$ kell, hogy teljesüljön, hiszen mindenképpen legalább egyet dob a játékos. A nevező miatt $z = 0$-t közvetlenül nem tudjuk behelyettesíteni, helyette $\lim_{z\to 0}$-t kell vennünk; L'Hospital szabály révén azt kapjuk, hogy a (−)-os esetben $\lim_{z\to 0} G(z) = 0$, míg a (+)-os esetben $\lim_{z\to 0} G(z) \neq 0$, így a valódi megoldás

$$G(z) = \frac{6 - z - \sqrt{36 - 12z - 15z^2}}{2z}.$$

$G(1) = 1$ teljesül, amiből következik, hogy 0 annak a valószínűsége, hogy egy játékos végtelen sokszor gurít anélkül, hogy közben továbbadná a kockát.

$$G'(1) = 2.$$

(c) Ez is véletlen tagszámú összeg ugyan, de a tagok száma nem független az egyes tagoktól, úgyhogy csak óvatosan! Viszont a teljes várható érték tétel gyakorlatilag ugyanúgy működik, mint az (a) részben, csak minden dobásnál 1 helyett a dobás értékét kell hozzáadni, aminek a generátorfüggvénye $\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6$, és így $G(z)$-re az egyenlet ezúttal

$$G(z) = \left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6\right)\left(\frac{4}{6}\cdot 1 + \frac{1}{6}\cdot G(z) + \frac{1}{6}\cdot G^2(z)\right),$$

ami ugyanúgy másodfokú egyenletre vezet, ugyanúgy a (−)-os megoldás kell (a képlet explicit, de elég ronda, nem írjuk ki), és

$$G'(1) = 7.$$

Ha csak a várható érték kell, akkor az amúgy úgy is kiszámítható, hogy a (b) részből a dobások számának várható értéke 2, és minden dobás várható értéke $\frac{7}{2}$, és a várható érték számításához nem kell függetlenséget feltenni.

6. (a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$. Gondoljuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = F^n(x)$.

(b) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbb{P}(X_i < x)$. Legyen N ezektől független, pozitív egész értékű valószínűségi változó. Jelölje N *generátorfüggvényét* $G(z)$. Mutassuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.

(c) Egy vetélkedőn 3-5 fős csapatok vesznek részt. Egy csapat minden tagjának háromszor kell dobnia egy labdával, és a csapat eredménye ezen dobások közül a legnagyobb. A versenyen minden résztvevő egyformán jól dob, egy dobás nagyságának sűrűségfüggvénye (méterben):

$$f(x) = \frac{50}{3x^2}, \quad 10 \le x \le 25$$

A versenyen ugyanannyi 3, 4 illetve 5 fős csapat van. Találomra kiválasztunk egy csapatot. Mi az eredményük eloszlásfüggvénye?

Megoldás.

(a) A függetlenség miatt

$$\Pr(Y < x) = \Pr(X_1 < x, \ldots, X_n < x) = \Pr(X_1 < x) \ldots \Pr(X_n < x) = (F(x))^n.$$

(b) Teljes valószínűség tételével

$$\Pr(Y < x) = \sum_{n=0\infty} \Pr(Y < x | N = n) \Pr(N = n) = \sum_{n=0\infty} F^n(x) \Pr(N = n) = G(F(x)).$$

(c) Az előző rész alapján

$$\Pr(Y < x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{3x^2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{50}{3x^2}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{50}{3x^2}\right)^3, \quad 10 \le x \le 25.$$