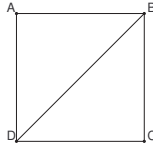


Sztochasztika  
6. feladatsor - Markov-láncok  
2022. ősz

1. Egy részeg körbe-körbe bolyong a faluban. A falu térképe a következő:



Amikor a részeg megérkezik egy sarokra (A, B, C vagy D), találmra választja ki a következő irányt a lehetséges utcák közül, kivéve azt az irányt, amerről legutóbb jött.

A részeg által meglátogatott utcasarkok sorozata Markov-láncot alkot-e? Ha nem, javasoljunk helyette egy Markov-láncot, ami leírja a bolyongást.

2. Egy  $8 \times 8$ -as sakktáblán egy huszár lépked véletlenszerűen úgy, hogy minden egyes lépésben a lehetséges lépések közül egyenletesen választ. Jelölje  $X_n$  a pozícióját az  $n$ . lépés után.

- (a) Gondoljuk meg, hogy  $X_n$  Markov-lánc. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?
- (b) Adjuk meg a stacionárius eloszlását.
- (c) Tegyük fel, hogy most az A1 mezőn áll a huszár. Mekkora a valószínűsége, hogy 99 lépés után ismét az A1 mezőn áll? És 100 lépés után?

3. Egy Markov-lánc átmenet-mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Rajzoljuk fel a Markov-lánc gráf-reprezentációját!
  - (b) Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e a Markov-lánc?
  - (c) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indul. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 lépés múlva ismét az 1-es állapotban van? És 3 lépés múlva?
  - (d) Tegyük fel, hogy az 1-es állapotból indul. Mekkora a valószínűsége, hogy 100 lépés múlva ismét az 1-es állapotban van? És 101 lépés múlva?
  - (e) Hosszú távon az idő mekkora részében van az 1-es állapotban?
4. Jónás kedvenc számítógépes játékában 3 pálya van. Ha az 1-es pályát sikerül teljesítenie, továbblép a 2-es pályára, de ha nem, akkor ismét az 1-eset kell megpróbálnia. Ha a 2-es pályát teljesíti, továbblép a 3-as pályára, de ha nem, visszaugrik az 1-es pályára. A játékot akkor nyeri meg, ha a 3-as pályát is teljesíti. A 3-as pálya után mindenképpen az 1-es következik. Az 1-es pályát  $3/4$  eséllyel teljesíti (az előzményektől függetlenül), a 2-es pályát  $2/3$  eséllyel, a 3-as pályát  $1/2$  eséllyel. Jelölje  $X_n$  azt, hogy  $n$  pálya után éppen melyik pályán játszik.
- (a) Gondoljuk meg, hogy  $X_n$  Markov-lánc. Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?
  - (b) Tegyük fel, hogy most az 1-es pálya következik. Mekkora a valószínűsége, hogy sikeresen teljesíti mindhárom pályát egyhuzamban?
  - (c) Tegyük fel, hogy most az 1-es pályánál tart. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 pályával később ismét az 1-es pályánál tart?
  - (d) Tegyük fel, hogy most az 1-es pályánál tart. Mekkora a valószínűsége, hogy 20 pályával később ismét az 1-es pályánál tart?
  - (e) Átlagosan a próbálkozások mekkora részét tölti az 1-es pályával hosszú távon?
  - (f) Mekkora a valószínűsége, hogy 20 pálya múlva éppen megnyeri a játékot?
  - (g) Átlagosan hány pályát kell végigjátszania ahhoz, hogy egyszer megnyerje a játékot?
  - (h) Az első pálya átlagosan 6 percig tart (sikerességtől függetlenül), a második 12 percig, a harmadik 18 percig. Mennyi időt tölt egy pályával átlagosan?

5. A Söder kft. kétféle munkát vállal: A és B típusút. Az A típusú munka 1 hónapig tart, és a bevételük belőle 1,4 millió forint, a B típusú munka 2 hónapig tart és a bevételük belőle 2,7 millió forint. Minden hónap elején vesznek fel rendelést, feltéve, hogy nem tartanak éppen egy B típusú munka közepén. Minden hónap elején 60% eséllyel érkezik megrendelés B típusú munkára és 50% eséllyel A típusú munkára (függetlenül). Ha mindkét fajta megrendelés érkezik, akkor egy A típusút fogadnak el.
- Modellezzük a Söder kft. havi tevékenységét Markov-lánccal. Mik legyenek az állapotok? Mik az átmenetvalószínűségek?
  - Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Ez alapján adjuk meg, mennyi a Söder kft. átlagos havi bevétele hosszú távon.
  - Átlagosan mennyi idő telik el két tétlen hónap között?
  - A cégvezetés azon gondolkodik, hogy érdemes-e preferálni inkább a B típusú munkát olyankor, amikor mindkettőre érkezik megrendelés. Segítsünk nekik a döntésben!
6. Ottó munkahelyén minden dolgozót az  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  kategória valamelyikébe sorolnak. Ottó minden hónap végén a korábbi hónapoktól függetlenül  $1/2$  valószínűséggel eggyel magasabb kategóriába kerül (az 5-ös kategóriában helyben marad),  $1/3$  valószínűséggel eggyel alacsonyabb kategóriába kerül (az 1-es kategóriában helyben marad) és  $1/6$  valószínűséggel ugyanabban a kategóriában marad.
- Számoljuk ki a stacionárius eloszlást.
  - Az egyes kategóriákban fizetési bónuszt kapnak; a bónusz összege rendre 0, 10000, 20000, 30000, 40000 forint. Számítsuk ki, hosszú távon Ottó átlagosan mennyi bónuszt kap.
7. Géza bácsi minden reggel  $\frac{2}{3}$  eséllyel megveszi az aznapi újságot és beteszi a többi közé. Vacsora előtt a felesége  $\frac{1}{4}$  eséllyel az egész újságkupacot kidobja (akár hozott Géza bácsi újságot, akár nem). Ha összegyűlik 4 újság, azonnal kidobja őket. Egy este vacsora után meglátogatjuk Géza bácsiékat. Mi az ekkor az újságkupacban lévő újságok számának eloszlása? Mennyi az újságkupac átlagos mérete?
8. Jónás gépjármű-felelősségbiztosítója 4 kategóriába osztja az ügyfeleket: 1, 2, 3, 4. Ha egy ügyfél egy éven át nem okoz balesetet, egy kategóriával feljebb kerül (illetve ha a 4-esben volt, akkor ott marad). Ha egy ügyfél súlyos balesetet okoz, akkor a következő évben az 1-es kategóriába kerül. Ha egy ügyfél egy adott évben könnyű balesetet okoz, de súlyos balesetet nem, akkor a következő évben egy kategóriával lejjebb kerül (ha az 1-esben volt, akkor ott marad).
- Jónás egy év alatt  $1/12$  eséllyel okoz súlyos balesetet, és  $1/4$  annak az esélye, hogy okoz könnyű balesetet, de súlyosat nem.
- Modellezzük a folyamatot Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Milyen a Markov-lánc irreducibilitás és periodicitás szempontjából?
  - Mekkora a valószínűsége, hogy Jónás két év múlva a 2-es kategóriába tartozik, ha most a 4-es kategóriában van?
  - Mekkora a valószínűsége, hogy 10 év múlva a 2-es kategóriába esik?
  - Hosszú távon az évfordulók mekkora része olyan típusú, hogy 3-as kategóriából 4-es kategóriába lép?
  - Az egyes kategóriák esetén az éves díj rendre 120000, 72000, 54000, 36000 forint. Mennyi a Jónás által fizetett éves díj hosszú távon átlagosan?
9. A Faláb FC az egyetemi focibajnokságban játszik. A bajnokságnak 3 osztálya van: A, B és C. A C osztályból  $2/3$  valószínűséggel feljutnak a B osztályba a következő szezonra, egyébként maradnak a C osztályban (az előzményektől függetlenül). A B osztályból  $1/2$  valószínűséggel feljutnak az A osztályba,  $1/3$  valószínűséggel maradnak a B osztályban és  $1/6$  valószínűséggel visszaesnek a C osztályba. Az A osztályban  $1/10$  valószínűséggel megnyerik a bajnokságot,  $2/5$  valószínűséggel nem nyernek, de maradnak az A osztályban,  $1/2$  valószínűséggel pedig kiesnek a B osztályba.
- Modellezzük a Faláb FC szezononkénti szereplését Markov-lánccal. Mik az állapotok? Adjuk meg az átmenetmátrixot. Irreducibilis-e a Markov-lánc? Aperiodikus-e?
  - Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 2 szezonnal később a B osztályban vannak?
  - Tegyük fel, hogy most a C osztályban vannak. Mekkora a valószínűsége, hogy 20 szezonnal később a B osztályban vannak?
  - Hosszú távon az idő mekkora részét töltik a B osztályban?
  - Mekkora az esélye, hogy 10 szezon múlva a szezon végén kiesnek?
  - Átlagosan hány szezon telik el bajnoki cím között?