

Minta vizsga-feladatsor A
Sztochasztika
2022. ősz

1. Egy bizonyos vírussal fertőzött számítógép megfertőz véletlen számú további számítógépet $\text{PGEO}(1/2)$ eloszlással, mielőtt a vírust megtalálják rajta és kiirtják. Kezdetben a vírus csak egyetlen számítógépen van jelen.
 - (a) Modellezzük a vírus terjedését elágazó folyamattal. Mik az egyedek? A folyamat szubkritikus, kritikus vagy szuperkritikus?
 - (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a vírus terjedése előbb-utóbb megáll?
 - (c) Várhatóan hány számítógépet fertőz meg a vírus az élettartama alatt?
2. Egy tanár átlagosan 4 percet, maximum 10 percet tölt egy zárthelyi javításával. Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy 5 óra nem elég 50 zárthelyi kijavítására.
3. Egy kis üzlet parkolójában 2 autónak van hely. Átlagosan 10 percenként érkezik egy ügyfél autóval. Ha éppen van hely a parkolóban, az ügyfél leparkol és bemegy az üzletbe. Ha a parkoló tele van, az ügyfél egyből továbbhajt. Minden egyes ügyfél, aki bement az üzletbe, átlagosan 5 percet tölt bent, majd távozik.
 - (a) Jelölje X_t a parkolóban álló autók számát a t időpontban. Milyen feltevésekre van szükség, hogy X_t -re teljesüljön a Markov-tulajdonság? Adjuk meg a generátort.
 - (b) Mekkora az esélye, hogy egy véletlen időpontban a parkoló üres?
 - (c) Hosszú távon az ügyfelek mekkora része távozik amiatt, hogy tele a parkoló?
4. Béla egy építkezésen dolgozik, és az ideje p részét cigiszünetekkel tölti. A héten 10 különböző véletlen időpontban elhaladtunk az építkezés mellett, és ebből Bélát 3-szor láttuk cigizni. Adjunk ez alapján momentum-becslést p értékére.
5. Magyarországon a felnőtt nők magasságának átlaga 164 cm, szórása 9 cm. Tihamér azt állítja, hogy a szülőfalujában a nők magasabbak az átlagosnál. Ennek tesztelésére megmérjük 25 felnőtt nő magasságát a faluból, és az átlagra 171 cm-t kapunk. Teszteljük 95%-os konfidenciaszinten azt a hipotézist, hogy Tihamér szülőfalujában a nők átlagos magassága megegyezik az országos átlaggal, azon hipotézis ellenében, hogy Tihamér szülőfalujában a nők átlagos magassága nagyobb az országos átlagnál.

Minta vizsga-feladatsor B
Sztochasztika
2022. ősz

1. Van három ötforintos érménk, melyek közül az egyik szabályos (az egyik oldalán fej van, a másikon írás, és egyforma eséllyel esik a két oldalára), a másodiknak mindkét oldalán fej van, a harmadiknak pedig mindkét oldalán írás van. Találomra kiválasztjuk az egyik érmét, és feldobjuk kétszer.
 - (a) Mekkora a valószínűsége, hogy mindkét dobás fej?
 - (b) Feltéve, hogy mindkét dobás fej, mekkora a feltételes valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottuk?
2. Teri néni két ismerősével szokott telefonon beszélni, a nővérével és a barátnőjével. A nővérével átlagosan hetente kétszer telefonál, a barátnőjével átlagosan hetente háromszor.
 - (a) Mekkora a valószínűsége, hogy Teri néni a hétvége folyamán nem telefonál?
 - (b) Teri néni minden pletykát, amit hall, az első adandó alkalommal továbbad. Hétfő délben hall a nővérétől egy pletykát; mekkora az esélye, hogy péntek délig még nem mondta el a barátnőjének?
 - (c) Mekkora a valószínűsége, hogy a következő két telefonbeszélgetése két különböző partnerrel zajlik?
3. Egy atlétikai versenyen 400 résztvevő indul. Korábbi tapasztalatok alapján tudjuk, hogy a verseny alatt egy résztvevő vízfogyasztásának várható értéke 2 liter, szórása 1 liter. Mennyi vizet biztosítsanak a szervezők a versenyre, ha azt szeretnék, hogy 99% valószínűséggel elég legyen a versenyzőknek?
4. Egy önkiszolgáló fénymásológéphez óránként átlagosan 5 ügyfél érkezik. Ha egy ügyfél éppen szabadon találja a gépet, akkor elkezd használni, de ha olyankor érkezik, amikor valaki más éppen használja a gépet, akkor továbbmegy és nem tér vissza. A gép 10 oldal per perc sebességgel fénymásol. Egy ügyfél átlagosan 80 oldalt akar fénymásolni egyszerre.
 - (a) Modellezzük a gépet folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok, és milyen feltevésekre van szükség ahhoz, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Adjuk meg a generátort.
 - (b) Hosszú távon az idő mekkora részében szabad a fénymásológép?
 - (c) Egy oldal fénymásolása 20 forint hasznót hoz a gép üzemeltetőjének. Hosszú távon átlagosan mennyi hasznót termel a gép óránként?
5. Szeretnénk tesztelni, hogy egy hatoldalú dobókocka szabályos-e. Ehhez dobtunk vele 200-szor, az eredmény:

érték	1	2	3	4	5	6
darab	41	29	35	30	39	26

Döntsünk 95%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy a dobókocka minden lapjára egyforma eséllyel esik, azon hipotézis ellenében, hogy nem.

Minta vizsga-feladatsor C
Sztochasztika
2022. őszi

1. Van két érménk, az egyik szabályos, a másiknak viszont mindkét oldalán fej van. Találomra választunk egy érmét, majd feldobjuk háromszor.
 - (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindhárom dobás fej?
 - (b) Feltéve, hogy mindhárom dobás fej, mennyi a feltételes valószínűsége annak, hogy a szabályos érmevel dobtunk?
2. Egy orvos átlagosan 5 percet, maximum 15 percet foglalkozik egy betegével. Adjunk nagyleltetés-bebecslést annak a valószínűségére, hogy egy 4 órás rendelési idő nem elég 25 betegre.
3. Egy vásáron az arcfestő művész kétféle mintát fest: tigris vagy pillangót. Egy tigris 10 perc alatt fest meg, egy pillangót 20 perc alatt. Minden egyes gyerek $2/3$ eséllyel azt a mintát kéri, amit az előtte lévő, $1/3$ eséllyel a másikat. Hosszú sorban állnak a gyerekek, az arcfestő folyamatosan dolgozik.
 - (a) Modellezzük az arcfestő tevékenységét diszkrét idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az átmenet-valószínűség mátrixot.
 - (b) Hosszú távon az idő mekkora részét tölti tigris festésével?
 - (c) Az arcfestő egy tigrisért 1800 forintot kér, egy pillangóért 1200 forintot. Mennyi az átlagos bevétele 8 óra alatt?
4. A vevők sorbanállnak egy fagyiarusnál. Az árus egyszerre egy vevőt szolgál ki, a többiek addig sorbanállnak. Ha a sor hossza (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állót is) legalább 3 fő, a további érkezők azonnal továbbmennek (pl. egy másik fagyiarushoz). A vevők átlagosan 2 percenként érkeznek, és egy vevő kiszolgálása átlagosan 1 percig tart.
 - (a) Mit kell feltenni, hogy a sor hossza folytonos idejű Markov-lánc legyen? Írjuk fel a generátort.
 - (b) Átlagosan hány vevő áll sorban?
 - (c) Átlagosan mennyi időt tölt egy vevő a fagyiarusnál (beleértve a sorbanállást és a kiszolgálást is)?
5. Egy kábelen haladó áram feszültségét csak hibával terheltén tudjuk mérni, a mérési eredménynek a szórása $0.1V$. 6 mérés eredményére a következő adódott (voltban): 8.86, 8.92, 8.85, 8.93, 8.95, 8.89. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy a feszültség $9V$ azon hipotézis ellenében, hogy a feszültség kevesebb, mint $9V$.

Minta vizsga-feladatsor D
Sztochasztika
2022. ősz

1. Kezdetben egy okostelefonon egy app fut, ami további appokat indíthat, amik szintén további appokat indíthatnak, és így tovább. A futásideje alatt egy app véletlen számú további appot indít, $POI(0.9)$ eloszlással, függetlenül a többi apptól.
 - (a) Jelölje X_2 a kezdeti app által indított appok által indított appok számát. Számítsuk ki X_2 várható értékét.
 - (b) Mekkora az esélye, hogy egy idő után nem indul újabb app?
 - (c) Számítsuk ki az összes appok számának várható értékét.
2. Egy fogadásra 400 vendéget várnak, és kétféle menü lesz: A és B. Az A menüből 220 adagot tudnak készíteni, a B menüből 500 adagot. Minden vendég (egymástól függetlenül) 50 – 50% eséllyel választ A illetve B menüt. Mekkora az esélye, hogy nem jut mindenkinek abból, amit szeretne?
3. Egy automata mosodában 3 mosógép üzemel. Átlagosan 1 óránként érkezik egy ügyfél, Poisson-folyamat szerint. Ha van szabad mosógép, taláalomra választ egyet a szabad mosógépek közül, és azon elindít egy mosást. Egy mosás átlagosan 2 óráig tart; a mosás végeztével a mosógép azonnal újra használható.
 - (a) Modellezzük a mosoda állapotát folytonos idejű Markov-lánccal. Mik az állapotok? Mit kell még feltenni a feladat szövegében adottakon túl, hogy a Markov-tulajdonság teljesüljön? Írjuk fel a generátort. Figyeljünk a rátákra!
 - (b) Feltéve, hogy most éppen egy mosógép szabad, mennyi az esélye, hogy 10 perc múlva mind foglalt?
 - (c) Mekkora a mosoda hosszú távú átlagos kihasználtsága? (Például amikor 1 mosógép dolgozik a 3-ból, akkor a pillanatnyi kihasználtság $1/3$.)
4. Egy irodaházban a tűzriadók Poisson-folyamat szerint történnek, ismeretlen λ (tűzriadó per hónap) rátával. Feljegyeztük az egymást követő tűzriadók között eltelt napok számát, amire a következő minta adódott: 7, 12, 44, 29, 28. A minta alapján adjunk maximum-likelihood becslést λ értékére. (Egy hónapot tekintsünk 30 napnak.)
5. Egy nyereményjátékban az üdítőskupak belsejében négyféle betű valamelyike található. A gyártó cég azt állítja, hogy minden betű egyforma arányban fordul elő. Ezt szeretnénk tesztelni. Ehhez veszünk egy 200 elemű mintát, amelyben az egyes betűk gyakoriságára a következő minta adódott: 63, 34, 50, 53. Döntsünk 95%-os szignifikancia-szinten arról, hogy az arányok egyformának tekinthetőek-e.

Minta vizsga-feladatsor E
Sztochasztika
2022. ősz

1. Egy videójátékban a játékos találhat aranyérmét vagy fegyvert. Átlagosan 10 percenként 2 fegyver és 4 aranyérme esik.
 - (a) Mennyi az esélye, hogy 5 perc játék alatt pontosan 2 tárgy esik (bármelyik a két típusból)?
 - (b) Mennyi az esélye, hogy 5 perc játék alatt a teljes zsákmány csak fegyvereket tartalmaz?
2. Egy atlétikai versenyre vizet kell biztosítanunk a versenyzőknek. 400 versenyző van a versenyen, és korábbról tudjuk, hogy egy versenyző fogyasztásának várható értéke 2 liter, szórása 1 liter. Mennyi vizet biztosítsunk, ha azt szeretnénk, hogy 99% valószínűséggel elég legyen a versenyzőknek?
3. Ottó egy videójátékkal játszik, amelyben 3 pálya van. Az első pálya 0.8 eséllyel sikerül neki, ekkor mehet tovább a 2. pályára. A 2. pályán 0.5 valószínűséggel sikeres. Ha sikerül neki, akkor megy tovább a 3. pályára, különben ismét az 1. pályán próbálkozik. A 3. pályán 0.4 valószínűséggel sikeres. A 3. pálya eredményétől függetlenül következőnek mindenképpen az 1. pálya jön.
 - (a) Modellezzük a folyamatot diszkrét idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az átmenet-valószínűség mátrixot. A Markov-lánc irreducibilis-e? Aperiodikus-e?
 - (b) Feltéve, hogy most az 1. pálya jön, mekkora a valószínűsége, hogy 2 játék múlva a 2. pálya következik majd?
 - (c) Az 1. pálya átlagosan 2 percig tart, a 2. pálya 3 percig, a 3. pálya 5 percig. Számítsuk ki, hogy hosszú távon átlagosan hány perc egy pálya.
4. Egy jelfeldolgozó eszközhöz átlagosan percenként 4 jel érkezik, Poisson-folyamat szerint. Egy jel feldolgozása átlagosan 5 másodpercig tart. Egy jel feldolgozása alatt beérkező további jelek elvesznek.
 - (a) Modellezzük az eszköz állapotát folytonos idejű Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
 - (b) Az eszköz fogyasztása 8W jelfeldolgozás közben és 2W egyébként. Mennyi a hosszú távú átlagos fogyasztása?
5. Egy társasjáték dobozán az szerepel, hogy egy parti átlagos hossza 60 perc. Játszunk vele 5 partit, melyek hossza rendre 53, 62, 45, 61, 44 percnek adódik. Ez alapján teszteljük 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy egy parti átlagos hossza 60 perc, azon hipotézis ellenében, hogy egy parti átlagos hossza nem 60 perc.

Minta vizsga-feladatsor F
Sztochasztika
2022. ősz

1. Egy egyetemre járó diákok 60%-a lány, 40%-a fiú. A lányok 90%-a hosszú hajú, 10%-a rövid hajú. A fiúk 20%-a hosszú hajú, 80%-a rövid hajú. Véletlenszerűen választunk egy egyetemre járó diákot.
 - (a) Mekkora a valószínűsége, hogy a diák hosszú hajú?
 - (b) Feltéve, hogy a diák hosszú hajú, mekkora a feltételes valószínűsége, hogy lány?
2. Egy parkolóba átlagosan 10 perc alatt 25 autó érkezik.
 - (a) Mekkora annak az esélye, hogy 2 perc alatt pontosan 4 autó érkezik?
 - (b) Feltéve, hogy 2 perc alatt pontosan 4 autó érkezik, mekkora a feltételes valószínűsége, hogy azokból pontosan 2 autó érkezik az első percben?
3. Adjunk nagyeltérés-bebecslést annak a valószínűségére, hogy 100 szabályos kockadobásból legalább 50 hatos.
4. Egy kis nyelviskolában 3 nyelvtanár tanít, akik néha betegek. Minden egyes tanár átlagosan 2 havonta betegszik meg (a többiektől függetlenül), és egy betegség átlagosan 10 napig tart. (1 hónapot tekintünk 30 napnak.)
 - (a) Jelölje $X(t)$ az egészséges tanárok számát a t időpontban. Mit kell feltenni, hogy $X(t)$ folytonos idejű Markov-lánc legyen? Mik a lehetséges állapotok? Írjuk fel a generátort.
 - (b) Átlagosan hány tanár egészséges?
 - (c) Most 1 tanár beteg. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 2 nap múlva minden tanár egészséges.
5. Amikor valaki elvégez egy IQ tesztet, az eredmény véletlenszerű, melynek várható értéke a valódi IQ, szórása 3. Jónás azt állítja, hogy az IQ-ja 120. Ennek bizonyítására elvégez 5 különböző IQ tesztet, melyek eredménye rendre 118, 116, 119, 119, 118. Teszteljük 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy Jónás IQ-ja 120, azon hipotézis ellenében, hogy az IQ-ja nem 120.