AZ 2. ZH MEGOLDÁSAI, A csoport

②/b) FOLYTATÁS: megoldásait (az új koordinátarendszer és abban a tengelymetszetek pontosan legyenek feltüntetve)!

MEGOLDÁS:

②/a): Karakterisztikus egyenlet: $\det\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 5-\lambda & 3 \\ \hline 3 & 5-\lambda \\ \hline\end{array}\right) = 0$ (1 pont)

$(5-\lambda)^2 - 9 = 0$, azaz $25 - 10\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$, azaz

$\boxed{\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0}$ Ennek a megoldásai: $\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2}$

$\boxed{\lambda_1 = 8}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$ (1 pont) Ezek az $\underline{A}$ sajátértékei.

Sajátvektorok:

$$\lambda_1 = 8 \quad \left.\begin{array}{l}(5-8)\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 0 \\ 3\cdot x_1 + (5-8)\cdot x_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}-3x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Tehát például $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ egy sajátvektor. (1 pont)

$$\lambda_2 = 2 \quad \left.\begin{array}{l}(5-2)\cdot x_1 + 3\cdot x_2 = 0 \\ 3\cdot x_1 + (5-2)\cdot x_2 = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow x_2 + x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2$$

Tehát például $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ egy sajátvektor. (1 pont)

②/b) megoldása. Az új koordinátarendszer bázisvektorai legyenek az $\underline{A}$ mátrix sajátvektorai, mert az új merőleges koordináta-rendszerben az $5x^2+6xy+5y^2$ kvadratikus $= (x,y)\cdot\underline{A}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alak négyzetösszeggé transzformálódik.

$\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ merőlegesek, de nem egységnyi hosszúságúak, így legyen $\underline{b}_1 := \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}$ és $\underline{b}_2 = \frac{\underline{v}_2}{\|\underline{v}_2\|}$, mert akkor $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ ortonormált bázisa lesz $\mathbb{R}^2$-nek. $\|\underline{v}_1\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\|\underline{v}_2\| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$, így az új koordináta-rendszer bázisa: $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ és $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ (2 pont)