

AZ, Z, ZH MEGOLDÁSAI, A CSOPORT

③ MEGOLDÁS:

Két ntk akkor párhuzamos, ha a normálvektoraiik párhuzamosak.

A $2x + 2y + z = 0$ ntk normálvektora $(2, 2, 1)$.

Az $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ felület érintőnőke az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

pontban: $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Általában: $f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + (-1) \cdot (z - f(x_0, y_0)) = 0$

Tehát az érintőnőke normálvektora $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$

Azaz nekünk olyan (x_0, y_0) kell, hogy (1 pont)

$(2, 2, 1)$ háromszor legyen $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1)$ -nek!

Ez a háromszor csak (-1) -szeres lehet a 3. koordináta miatt.

Tehát kell: $f'_x(x_0, y_0) = -2$ és $f'_y(x_0, y_0) = -2$ (1 pont)

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad f'_x(x, y) = 2x \quad f'_y(x, y) = 2y$$

Azaz kell $2x_0 = -2$ és $2y_0 = -2 \Rightarrow x_0 = -1, y_0 = -1$ (1 pont)

$$\text{Ezért } f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$$

Tehát a forgóparaboloid $P(-1, -1, 2)$ pontja a megoldás (1 pont)

④ Hol és milyen szélsőértőke van az $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y$ függvénynek? (4 pont)

Megoldás: Stacionárius pont: $f'_x(x, y) = 2x + y + 1 = 0$ (1 pont)

$$f'_y(x, y) = x + 2y + 1 = 0$$

Az első egyenlethől kivonva a másodikat: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

Ezt visszahelyettesítve: $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = y = -1/3$

KRITIKUS PONT: $P(-1/3, -1/3)$ (1 pont) Hesse-mátrix:

2	1
1	2

A mátrix sajátértőkei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = 3$ pozitívak, így a kritikus pontunk lokális minimumhely. (2 pont)