

**9. feladatsor, 8. feladat:**

A  $T$  transzformáció matrixa  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Keressük meg a matrix sajátbázisát, és abban a bázisban felírva  $T$  matrixa diagonális lesz. Eloszor is határozzuk meg az  $A$  matrix sajátértékeit!

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= (2 - \lambda)(-\lambda)(2 - \lambda) + (-1)(-1)(-1) + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - \\ &= (-1)(-\lambda)(-1) - (-1) \cdot 1 \cdot (2 - \lambda) - (-1) \cdot 1 \cdot (2 - \lambda) = \\ &= (2 - \lambda)^2(-\lambda) + 2 - \lambda = (2 - \lambda)((2 - \lambda)(-\lambda) + 1) = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Mivel korültekintően írtuk fel a karakterisztikus polinomot, így a harmadfokú egyenlet megoldóképlete nélkül megúsztuk a számolást! Az a trükk, hogy a Sarrus-szabály egy 6 tagú összeget ad, amiből az egyik, nevezetesen a foatlo-hoz tartozó tag (nálunk  $(2 - \lambda)(-\lambda)(2 - \lambda)$ ) harmadfokú, a többi pedig legfeljebb elsőfokú polinomja  $\lambda$ -nak. Azt kell csinálni, hogy a harmadfokú tagot szorzat alakban hagyjuk, viszont a legfeljebb elsőfokú tagokat összevonjuk, és ha mazlink van, akkor az egész szorzattá alakítható.

Tehát két különbozó sajátérték van,  $\lambda_1 = 2$  és  $\lambda_2 = 1$ . Ezen ponton még nem tudtuk eldönteni, hogy az  $A$  matrix diagonalizálható-e. (Ha három különbozó sajátérték lett volna, akkor automatikusan következett volna az eloadason tanultakból, hogy van 3 linearisan független sajátvektor, azaz sajátbázis).

A  $\lambda_1 = 2$  sajátértékhez tartozó sajátvektor-egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, oldjuk meg. A három egyenlet:  $-y_1 - z_1 = 0$ ,  $x_1 - 2y_1 - z_1 = 0$ ,  $-x_1 + y_1 = 0$ . Tehát a harmadik egyenletet átrendezve  $x_1 = y_1$ , és ezt visszahelyettesítve az első kettőbe:  $-x_1 - z_1 = 0$ ,  $-x_1 - z_1 = 0$ . Ez a két egyenlet ugyanaz, így ha mondjuk  $x_1$  a szabad változó, akkor a homogén lineáris egyenletrendszerünk megoldásai a szabad

változóval kifejezve  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$  alakúak. Legyen mondjuk  $x_1 = 1$

azaz a  $\lambda_1 = 2$  sajátértékhez tartozó sajátvektor  $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

A  $\lambda_2 = 1$  sajáttertekhez tartozó sajátvektor-egyenlet:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez a három egyenlet legyegeben ugyanaz, tehát igazából egyetlen egyenletünk van:  $x_2 = y_2 + z_2$ . Tehát két szabad változó van (ebben az esetben bármelyik kettőt választhatnánk szabad változonak, legyen mondjuk):  $y_2$  és  $z_2$ . Tehát a sajátvektor-egyenlet általános megoldása ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 + z_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} = y_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tehát lehet ehhez a sajáttertekhez két lineárisan független sajátvektort találni:  $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  és  $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Tehát a feladat megoldása:  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$  lesz az a bázis  $\mathbb{R}^3$ -ben, amelyben  $T$  matrixa diagonális.

Innentől már csak szorgalomból ellenőrizzük le a  $D = P^{-1}AP$  azonosságot, ahol  $P = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$  a három bázisvektorból, mint oszlopvektorokból összerakott matrix, valamint  $D$  az a diagonális matrix, aminek a főátlójában a sajátértékek állnak.

*Elmélet:*

$$PD = (\lambda_1 \underline{v}_1, \lambda_2 \underline{v}_2, \lambda_3 \underline{v}_3) = A \cdot (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) = AP$$

Es az így kapott  $PD = AP$  azonosságot balról  $P^{-1}$ -el megszorozva kapjuk meg, hogy  $D = P^{-1}AP$ .

*Gyakorlat:*

$$\text{Valóban: } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki a  $P$  matrix inverzet Gauss-eliminációval:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Tehát  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Valóban:

$$P^{-1}P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

A  $D = P^{-1}AP$  azonosságot tulajdonképpen már le is ellenőriztük.