1 1. HF megoldasa:

Az 1. feladatsorrol voltak feladva ezek a feladatok.

1/(b):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) =$$

$$\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^n + \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\frac{\frac{4}{6}}{1-\frac{4}{6}} + \frac{1}{6}\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{7}{6}$$

2/(d) Gyokkriteriummal dontjuk el, hogy konvergens-e vagy divergens:

$$q = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n + 6^n}{3^n + 7^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n \frac{\left(\frac{2}{6}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1}\right)^{1/n} = \frac{6}{7}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\frac{2}{6}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{7}\right)^n + 1}\right)^{1/n} = \frac{7}{6}\cdot 1 < 1$$

Tehat $q < 1$, igy a sor konvergens.

2/(e) Gyokkriteriummal:

$$q = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n!^{1/n}} = \frac{2}{+\infty} = 0 < 1$$

Tehat a vegtelen sor konvergens.

Ugyanez hanyados-kriteriummal:

$$q = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{(n)!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

A hanyados-kriteriummal is kijott, hogy konvergens.

4/(h) Konvergens-e nagy divergens $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$?

Ez ugyanaz a kerdes, mint azt eldonteni, hogy $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ konvergens-e vagy diverges. Viszont $3 \leq n$ eseten $1 < \ln(n)$, igy a minorans-kriterium miatt $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n} \geq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$, tehat $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ divergens.

Integral-kriteriummal is kijon: $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ monoton csokkeno fuggvenye x-nek, ha $x > e$ (ezt derivalassal konnyu belatni: $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} < 0$, ha $x > e$), igy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n} = +\infty$ akkor es csak akkor, ha $F(x) = \int f(x)dx$ definicioval $\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty$.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int \ln(x)\ln'(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x)^2$$

Es valoban: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\ln(x)^2 = +\infty$, tehat az integral-kriteriummal is kijott, hogy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n}$ divergens.

2 A 2. feldatsorrol meg nehany feladat megoldasa

4/(a)

$$xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{(m-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}$$

4/(c) Mivel $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots$, igy

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \frac{(2x)^8}{8!} - \dots\right) =$$

$$1 - \frac{2^1}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \frac{2^7}{8!} - \dots$$

4/(d) Az alapotlet: ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, akkor

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot x^n$$

Tehat ha a fuggvenyt hatvanysorba tudtuk fejteni, akkor a derivaltjat is hatvanysorba tudjuk fejteni. Specialisan:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

5. Ne nagyon zavarjon minket, hogy "binomialis sor"-nak hivja, igazabol csak a Taylor-sort, azaz hatvanysort kell meghatarozni az $a = 0$ alappontban. A hatvanysor egyutthatoit *altalanositott binomialis egyutthatok*nak hivjak. Ha $f(x) = (1+x)^r$, ahol $r \in \mathbb{R}$, akkor

$$f'(x) = r(1+r)^{r-1}, \quad f''(x) = r(r-1)(1+r)^{r-2}, \quad f^{(3)}(x) = r(r-1)(r-2)(1+x)^{r-3}, \quad \dots$$

Tehat $f(x)$ $a = 0$ koruli hatvanysora:

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2!}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!}x^4 + \dots$$

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}x^k$$

Ebbe a kepletbe behelyettesitve jonnek ki az 5. feladat kerdeseire a valaszok:

$$(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{6}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}}{24}x^4 + \dots$$

$$(1+x^3)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}}{2}x^6 - \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}}{6}x^9 + \frac{\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{5}{2}\frac{7}{2}}{24}x^{12} + \dots$$

$$(1-2x)^3 = 1 - 3 \cdot 2^1 x + \frac{3 \cdot 2}{2}2^2x^2 - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6}2^3x^3 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{24}2^4x^4 + \dots =$$

$$1 + 3(-2x) + 3(-2x)^2 + 1(-2x)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}(-2x)^k$$

A binomialis tetelbol is pont ez jott volna ki. Azert hivjak altalanositott binomialis egyutthatoknak az $(1+x)^r$ hatvanysoranak egyutthatoit, mert ha r nemnegativ egesz szam, akkor $\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} = \binom{r}{k}$.

6/(a) Igaz, hogy L'Hospital-szaballyal sokkal gyorsabb lenne, de

$$f(x) = \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots) - (1+x)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots$$

Tehat $f(x)$-et sikerult hatvanysorba fejteni, igy $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$.