1 2. HF megoldasa:

Trukk: Ha egy fuggveny derivaltjat hatvanysorba tudjuk fejteni, akkor a fuggvenyt is hatvanysorba tudjuk fejteni, ugyanis ha

$$f'(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

akkor

$$f(x) = f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \frac{a_3}{4}x^4 + \cdots = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

3/(d): $f(x) = \ln(1+x)$-et kell hatvanysorba fejteni. $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, ezt konnyen hatvanysorba tudjuk fejteni:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

Tehat $f'(x)$ Taylor-sorfejtesenek egyutthatoit megkaptuk: $a_n = (-1)^n$ es igy

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n = \ln(1+0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots$$

7/(b): Harom tizedesjegy pontossaggal kell kiszamolni az integralt.

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 - \cdots = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \dots$$

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \dots$$

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^{0.1} 1\,dx - \frac{1}{6}\int_0^{0.1} x^2\,dx + \frac{1}{120}\int_0^{0.1} x^4\,dx + \cdots =$$

$$0.1 - \frac{1}{6}\frac{1}{3}(0.1)^3 + \frac{1}{120}\frac{1}{5}(0.1)^5$$

Mivel a harmadik tag minimum 5 darab nullaval kezdodik, igy boven eleg az elso ket tagot beutni a szamologepunkbe, hogy megkapjuk az eredmenyt: $\int_0^{0.1} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = 0.099$.

2 Egy Fourier-soros feladat

Hatarozzuk meg annak a $T = 4$ periodusu $f(x)$ fuggvenynek a Fourier-sorat, amit az alabbi keplettel definialunk! Milyen fuggvenyt allit elo a Fourier-sor? (Legyunk kulonosen ovatosak az eredeti $f(x)$ fuggveny szakadasi pontjaiban felvett helyettesitesi ertekkel!)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \le x < 2 \\ x - 4 & \text{ha } 2 \le x < 4 \end{cases} \tag{1}$$

Ha felrajzoljuk a fuggvenyunk grafikonjat es periodikusan kiterjesztjuk, akkor azt fogjuk latni, hogy a $(-2, 2)$ intervallumon $f(x) = x$. Ez egy sokkal baratsagosabb felirasa a fuggvenyunknek, peldaul azonnal latszik, hogy az $f(x)$ fuggveny *paratlan*, es emiatt $a_k = 0$, ha $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\frac{2k\pi x}{T})\,dx = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(\frac{2k\pi x}{T})\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\sin(\frac{k\pi x}{2})\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(\left[x\frac{-\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)}\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}\frac{-\cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)}\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(2\frac{-\cos(k\pi)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)} - (-2)\frac{-\cos(-k\pi)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)} - \left[\frac{-\sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}\right]_{-2}^{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(4\frac{-\cos(k\pi)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)} - \left(\frac{-\sin(k\pi)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2} - \frac{-\sin(-k\pi)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2}\right)\right) =$$

$$2\frac{-\cos(k\pi)}{\left(\frac{k\pi}{2}\right)} + 0 - 0 = \frac{-4}{k\pi}\cos(k\pi) = \frac{-4}{k\pi}(-1)^k = \frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}$$

Tehat $b_1 = \frac{4}{\pi}, b_2 = -\frac{4}{2\pi}, b_3 = \frac{4}{3\pi}, b_4 = -\frac{4}{4\pi}, \dots$. Tehat az $f(x)$ fuggveny Fourier-sora

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) + b_k\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k\pi}(-1)^{k+1}\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \le x < 2 \\ 0 & \text{ha } x = 2 \\ x-4 & \text{ha } 2 < x < 4 \end{cases}$$

hiszen alkalmazhatjuk azt a gyakon tanult tetelt, ami kimondja, hogy ha $f(x)$ szakaszonkent folytonosan differencialhato (es ez most igy is van), akkor a $f(x)$ Fourier-sora $f(x)$-et allitja elo, kiveve a szakadasi pontokban, ahol a bal oldali es jobb oldali hatarertek szamtani kozepet allitja elo. Ne feledkezzunk meg arrol, hogy a periodikusan kiterjeszett fuggveny grafikonjanak szakadasi pontjait kell nezni, mert lehet, hogy pont ott van szakadas, ahol az ertelmezesi tartomany bal szele periodikusan osszeer a jobb szelevel! Nalunk nem igy van, mert a fuggvenyunk eredeti megadasanal az intevallum bal szele $x = 0$ volt es a jobb szele $x = 4$, es az f-nek az $x = 0$-ban vett jobb oldali hatarerteke $f(0_+) = 0$, az $x = 4$-ben vett bal oldali hatarerteke pedig $f(4_-) = 4 - 4 = 0$, es igy a periodikusan kiterjesztett fuggveny folytonos $x = 0$-ban, $x = 4$-ben, $x = 8$-ban, stb. A rajzon ez jol latszik. Viszont szakad $x = 2$-ben, $x = 6$-ban, $x = 10$-ben, stb, mert $f(2_-) = 2$ es $f(2_+) = 2 - 4 = -2$. Tehat $x = 2$-ben a bal es jobb oldali hatarertek szamtani kozepe $\frac{f(2_-)+f(2_+)}{2} = \frac{2-2}{2} = 0$, emiatt lett ebben a pontban a Fourier-sor altal eloallitott fuggveny helyettesitesi erteke $x = 2$ eseten 0-val egyenlo. Tehat az $f(x)$ fuggvenyunket eloallitotta a Fourier-sora, kiveve a szakadasi pontokban, ezek a $2 + 4k$ alaku pontok, ahol $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.