

1 Vektorterek

Ha V egy vektorter, akkor azt mondjuk, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorrendszer **generatorrendszere** V -nek, ha tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektorhoz vannak olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ valós számok, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektoroknak az $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ együtthatókkal képzett lineáris kombinációja előállítja a $\underline{v}$ vektort, azaz

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{v}$$

Ha ugyanez a vektorrendszer meg lineárisan független is, akkor azt mondjuk, hogy a V vektorternek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ egy **bázisa**.

Allítás: Egy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorrendszer pontosan akkor bázisa a V vektorternek, ha tetszőleges $\underline{v} \in V$ vektorhoz **pontosan egy** olyan $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ szám- n -es található, amire $\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{v}$, azaz egyértelműek az együtthatók a $\underline{v}$ vektort előállító lineáris kombinációban.

A 6. gyakorlat feladatsorának 2. feladata az volt, hogy írjuk fel az 1. feladatbeli vektorterek egy-egy bázisát. A megoldások:

(b) A vektorter egy általános eleme $(a, 0, b)$ alakú, így a $\underline{v}_1 = (1, 0, 0), \underline{v}_2 = (0, 0, 1)$ vektorrendszer bázisa lesz a vektorternek, hiszen az

$$(a, 0, b) = a \cdot (1, 0, 0) + b \cdot (0, 0, 1)$$

előállítás egyértelműen határozza meg az együtthatóit.

(c) A vektorter általános eleme olyan, hogy az első két koordináta meg akármilyen, de a harmadik az az első két összegének az ellentettje, azaz $(a, b, -(a+b))$ alakú. A bázis legyen $\underline{v}_1 = (1, 0, -1)$ és $\underline{v}_2 = (0, 1, -1)$, hiszen az

$$(a, b, -(a+b)) = a \cdot (1, 0, -1) + b \cdot (0, 1, -1)$$

előállítás egyértelműen határozza meg az együtthatóit.

(f) A vektorter általános eleme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ alakú. Legyenek a bázis elemei

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es így a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ vektorrendszer tényleg bázisa a kétszer kettes szimmetrikus matrixok vektorterének, hiszen a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

előállítás egyértelműen határozza meg az együtthatóit.

(i) Bázis: $\underline{v}_1 = x^3, \underline{v}_2 = x^2, \underline{v}_3 = x, \underline{v}_4 = 1$.

(k) Bázis: $\underline{v}_1 = (x-1), \underline{v}_2 = (x-1)^2, \underline{v}_3 = (x-1)^3$. Ez azért van így, mert tetszőleges legfeljebb harmadfokú $f(x)$ polinom egyértelműen felírható

$$f(x) = a_3 \cdot (x-1)^3 + a_2 \cdot (x-1)^2 + a_1 \cdot (x-1) + a_0$$

alakban ($a_n := \frac{f^{(n)}(1)}{n!}$, Taylor-polinom), és mivel $f(1) = a_0 = 0$ ebben a feladatban, így pontosan $\underline{v}_1 = (x-1), \underline{v}_2 = (x-1)^2, \underline{v}_3 = (x-1)^3$ segítségével állítottuk elő $f(x)$ -et, ráadásul egyértelműen.

(1) A bazis legyen $\underline{v}_1 = x^2, \underline{v}_2 = 1$, ugyanis egy általános legfeljebb harmadfokú polinom egyértelműen meghatározott a_3, a_2, a_1, a_0 együtthatókkal írható $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ alakban. Viszont mivel f páros, így $f(-x) = f(x)$, azaz

$$f(-x) = a_3(-x)^3 + a_2(-x)^2 + a_1(-x) + a_0 = -a_3x^3 + a_2x^2 - a_1x + a_0 = f(x)$$

Mivel az együtthatók egyértelműek, így $a_3 = -a_3$ és $a_1 = -a_1$, azaz $a_3 = a_1 = 0$. Tehát egy legfeljebb harmadfokú, páros polinom $f(x) = a_2x^2 + a_0$ alakú.

5. feladat megoldása: Igazából most mindegy, hogy kétszer kettes matrixokrol van szó, akár ki is egyenesíthetjük őket $\mathbb{R}^4$ -beli vektorokká. Tehát azt kell belátni, hogy $\underline{v}_1 = (3, 3, 6, -6)$, $\underline{v}_2 = (0, -1, -1, 0)$, $\underline{v}_3 = (0, -12, -8, -4)$, $\underline{v}_4 = (1, -1, 0, 2)$ bazis $\mathbb{R}^4$ -ben. Ehhez elég annyit belátni, hogy ebből a négy vektorból, mint oszlopokból összerakott 4×4 -es matrix determinansa nem nulla. Kifejtési tétellel kijön, hogy a determinans értéke -48 .

8. feladat. Ez a feladat csak egy átfogalmazása annak, hogy oldjuk meg az egyenletrendszert. A $\underline{b}$ vektor pontosan akkor van benne az A matrix oszlopai által kifeszített (generált) vektortérben, ha az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.

(a) Ha $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$, akkor $\underline{b}$ benne van a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok által kifeszített vektortérben, ugyanis $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = \underline{b}$. Ezt pontosan úgy kaptam meg, hogy az

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 3 \cdot y &= -2 \\ 4 \cdot x - 6 \cdot y &= 10 \end{aligned}$$

egyenletrendszert megoldottam, és az jött ki, hogy $x = 1, y = -1$. Az, hogy $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ megoldja az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszert, pontosan ugyanazt jelenti, mintha azt mondjuk, hogy $x \cdot \underline{v}_1 + y \cdot \underline{v}_2 = \underline{b}$.

(b) Ha $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ és $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, akkor $\underline{b}$ nincs benne a $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ vektorok által kifeszített vektortérben, ugyanis abban csak a $\underline{v} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix}$ alakú vektorok vannak benne. Az lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval megoldva is látszik, hogy nincs megoldása.

A hazi feladat pontos megfogalmazása: Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, azaz A egy n sorú, m oszlopú matrix, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ (azaz egy n hosszú oszlopvektor), akkor azt mondjuk, hogy $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ megoldja az A együtthatómatrixu, $\underline{b}$ megoldásvektoru egyenletrendszert, ha $A\underline{x} = \underline{b}$. Az egyenletrendszer megoldashalmaza azokból az $\underline{x}$ vektorokból áll, amik megoldják az egyenletrendszert.

H.F.: Mutassuk meg, hogy ha $\underline{b} = \underline{0}$, akkor ennek a homogén lineáris egyenletrendszernek a megoldashalmaza egy vektortér. Mi a helyzet, ha $\underline{b}$ nem minden koordinátája nulla (azaz, ha az egyenletrendszer inhomogén)?