

1 Bazisok

A 7. feladatsor 2. feladata helyett oldjuk meg ezt: legyenek

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 0, 3), \underline{v}_2 = (2, -5, -3, 6), \underline{v}_3 = (0, 1, 3, 0), \underline{v}_4 = (2, -1, 4, 6), \underline{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$$

Tehat csak a $\underline{v}_4$ utolsó koordinátáját változtattuk -7 -ről 6 -ra.

A feladat ugyanaz, mint ami a 7. feladatsor 2. feladata lenne. Keressük meg az $x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + x_3\underline{v}_3 + x_4\underline{v}_4 + x_5\underline{v}_5 = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásait!

Gauss-elimináció

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -9 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & 1 & -5 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -17 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 17/8 & 21/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mivel az 1., 2., 3., 5. oszlopokban van vezető 1-es, így az oszlopter négy dimenziós és $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_5$ egy bazisa. Mivel az oszlopok $\mathbb{R}^4$ -ből valók és négy darab lineárisan független $\mathbb{R}^4$ -beli vektor már magát $\mathbb{R}^4$ -et feszíti ki, tehát az oszlopter az maga $\mathbb{R}^4$ és $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_5$ az egy bazis $\mathbb{R}^4$ -ben.

A $\underline{v}_4$ vektor úgy fejezhető ki a többi oszlop lineáris kombinációjaként, hogy tudjuk, hogy a fenti homogén lineáris egyenletrendszerben x_4 a szabad változó (mert a 4. oszlopban nem volt vezető 1-es), válasszuk $x_4 = -1$ -nek. Ekkor kijön, hogy $x_5 = 0$, $x_4 = -1$, $x_3 = 17/8$, $x_2 = 19/24$, $x_1 = 5/12$. Azaz

$$\frac{5}{12}\underline{v}_1 + \frac{19}{24}\underline{v}_2 + \frac{17}{8}\underline{v}_3 - \underline{v}_4 + 0\underline{v}_5 = \underline{0}$$
$$\frac{5}{12}\underline{v}_1 + \frac{19}{24}\underline{v}_2 + \frac{17}{8}\underline{v}_3 = \underline{v}_4$$

3.feladat/(a)

Szemmel láthatólag a második sor az -3 -szoros a első sornak. Tehát az első két sor lineárisan összefügg, viszont a harmadik sor nem szamszorosa az elsőnek, tehát ok lineárisan függetlenek. Tehát a sorok két dimenziós, és az első és harmadik sor az egy bazis a sorok között. Tehát a mátrix rangja 3, így az oszlopter is két dimenziós, viszont az első két oszlop lineárisan független (hiszen nem szamszorosaik egymásnak), így ok egy kétdimenziós teret feszítenek, ami maga az oszlopter kell, hogy legyen, mert az is kétdimenziós. Tehát az első két oszlop az bazisa az oszlopternek.

4. feladat:

Általában: ha $\text{rang}(A) = \text{rang}[A|b]$, akkor van megoldása az egyenletrendszernek, ha $\text{rang}(A) + 1 = \text{rang}([A|b])$, akkor nincs megoldása az egyenletrendszernek. Csak ez a két eset lehetséges.

Továbbá, ha van megoldás, és A az egy $n \times m$ -es mátrix, azaz összesen m változó van és n egyenlet, akkor az egyenletrendszer megoldásában a szabad változók száma megegyezik $m - \text{rang}(A)$ -val. Így a 3. feladat megoldásai

- (a) van megoldás, és nincs szabad változó
- (b) nincs megoldás
- (c) van megoldás és két szabad változó van
- (d) van megoldás és két szabad változó van
- (e) nincs megoldás

- (f) Ez pontosan azt jelenti, hogy a A minden eleme nulla és b minden eleme nulla. Ekkor persze nincs is semmifele egyenlet, és minden változó szabad változó. De amúgy a képletből is kijön, hogy van megoldás és negy szabad változó van.
- (g) van megoldás és egyértelmű (azaz nincs szabad változó).

8. feladat:

Az (a) részfeladat speciális esete a (b) részfeladatnak ($k = 1, l = 1$).

(b) Mivel $f(x)g(x)$ periodikus 2π szerint, így $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(lx) dx = 0$, mivel $\cos(kx)$ páros függvény, $\sin(lx)$ páratlan függvény, így az integrandus páratlan függvény és az intervallum, amin integrálunk, szimmetrikus 0-ra.

10. feladat:

$$(a) \|u + v\| = \|(2, 2, 8, -1)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2 + (-1)^2} = \sqrt{73}$$

$$(b) \|u\| + \|v\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2} + \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2 + (-3)^2} = \sqrt{14} + \sqrt{63}$$

$$(c) \frac{1}{\|w\|} w = \frac{1}{\sqrt{4+1+1}} (2, 0, 1, 1) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$(d) \left\| \frac{1}{\|w\|} w \right\| = \left\| \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\| = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 1$$

$$11. \text{ feladat (b): } \|u - v\| = \|(-1, -5, -1)\| = \sqrt{1 + 25 + 1} = \sqrt{27}$$

12. feladat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|u + v\|^2 - \frac{1}{4} \|u - v\|^2 &= \frac{1}{4} \langle u + v, u + v \rangle - \frac{1}{4} \langle u - v, u - v \rangle = \\ &= \frac{1}{4} (\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle) - \frac{1}{4} (\langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle) = \\ &= \frac{1}{4} (\langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle) - \frac{1}{4} (\langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle) = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

13. feladat

(b) $1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -3$, tehát nem merolegesek.

(c) $a0 + b0 + c0 = 0$, azaz a $\underline{0}$ vektorra minden meroleges.

(d) $\langle u, v \rangle = (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-5) \cdot (-2) + 1 \cdot (-9) = -4 + 3 + 10 - 9 = 0$, tehát a két vektor meroleges.

(f) $\langle (a, b), (-b, a) \rangle = a \cdot (-b) + (-b) \cdot a = 0$, tehát merolegesek egymásra.