

7. feladatsor 6. feladat:

- (a) Azert nem skalárszorzat, mert egy skalárszorzatnak rendelkeznie kell azzal a tulajdonsaggal, hogy

$$||\underline{v}||^2 = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = 0 \implies \underline{v} = \underline{0}$$

azaz csak a nulla vektor hossza szabad, hogy nulla legyen. Viszont ebben a reszfeladatban $\langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle = 0$, hiszen $\langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle = \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$.

- (b) Azert nem skalárszorzat, mert egy skalárszorzatnak rendelkeznie kell azzal a tulajdonsaggal, hogy

$$\langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle.$$

Viszont ebben a reszfeladatban

$$\langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = (\lambda \cdot u_1)^2 v_1^2 + (\lambda \cdot u_2)^2 v_2^2 + (\lambda \cdot u_3)^2 v_3^2 = \lambda^2 (u_1^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 + u_3^2 v_3^2) = \lambda^2 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$$

- (c) Ez viszont teljesiti a belso szorzat-tulajdonsag osszes axiomajat (lasd eloadas).
(d) Azert nem skalárszorzat, mert egy skalárszorzatnak rendelkeznie kell azzal a tulajdonsaggal, hogy

$$||\underline{v}||^2 = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \geq 0$$

Viszont ebben a reszfeladatban $\langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle < 0$, hiszen

$$\langle \underline{e}_2, \underline{e}_2 \rangle = \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1.$$

8. feladatsor, 14. feladat:

90°-al forgatunk orajarassal ellentetes irányba balra.

- (a) Eloszor csak a természetes bazisban határozzuk meg a forgatás matrixat. Ezt a matrixot T_B -vel fogjuk jelölni.

$T_B \underline{b}_1$ lesz a T_B matrix első oszlopa, viszont $T_B \underline{b}_1$ az a $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektor elforgatottja, azaz $T_B \underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$T_B \underline{b}_2$ lesz a T_B matrix második oszlopa, viszont $T_B \underline{b}_2$ az a $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor elforgatottja, azaz $T_B \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tehát $T_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$T_{B'}$ -vel fogjuk jelölni a forgatás matrixat a másik bazisban, de ezt majd csak a (c)-ben számoljuk ki.

- (b) Ha (x', y') a koordinatai a $\underline{v}$ vektornak a B' bazisban, akkor az azt jelenti, hogy $\underline{v} = x' \underline{b}'_1 + y' \underline{b}'_2$. Ez alapján könnyű meghatározni a $\underline{v}$ (x, y) koordinatait a B bazisban, hiszen $\underline{b}'_1 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2$ és $\underline{b}'_2 = 2\underline{b}_1$, így

$$\underline{v} = x \underline{b}_1 + y \underline{b}_2 = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = x' \underline{b}'_1 + y' \underline{b}'_2 = x' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x' + 2y' \\ 1x' + 0y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Tehát $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, ahol a B' matrix oszlopai $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$. Azaz ha tudjuk a $\underline{v}$ vektor koordinatait a B' bazisban, akkor úgy kapjuk meg a koordinatait a B bazisban, hogy B' bazisbeli koordinátavektort szorozzuk a B' matrixszal.

Szorozzuk meg az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ egyenlet mindkét oldalát a B' matrix inverzevel balról:

$$B'^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B'^{-1} B' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Ez az egyenlet azt jelenti, hogy ha ismerjük a $\underline{v}$ vektor (x, y) koordinatait a B bazisban, és ki szeretnénk számolni a B' bazisbeli (x', y') koordinatait, akkor ezt a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = B'^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ képlet segítségével tehetjük meg. Tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Tehát ebben a speciális esetben

$$B'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- (c) Ha tudjuk a $\underline{v}$ vektor B' bazisbeli koordinatait, és meg akarjuk tudni az elforgatott vektor B' -beli koordinatait, akkor a következő három lépést kell tennünk. Jelölje $\underline{v}_2$ a 90° -al elforgatott vektort, és legyen (x_2, y_2) a $\underline{v}_2$ vektor B -beli koordinatai és (x'_2, y'_2) a B' -beli koordinatai, tehát

$$\underline{v} = x \cdot \underline{b}_1 + y \cdot \underline{b}_2$$

$$\underline{v} = x' \cdot \underline{b}'_1 + y' \cdot \underline{b}'_2$$

$$\underline{v}_2 = x_2 \cdot \underline{b}_1 + y_2 \cdot \underline{b}_2$$

$$\underline{v}_2 = x'_2 \cdot \underline{b}'_1 + y'_2 \cdot \underline{b}'_2$$

Az előzőkből tudjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T_B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = B'^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} = B'^{-1} \cdot T_B \cdot B' \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Tehát $T_{B'} = B'^{-1} T_B B'$. A tényleges matrix-szorzást nem végeztem el.