Kvadratikus alakok, negyzetosszegge transzformalasuk

Negyedfoku polinom: $x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 4$

Tobbvaltozos negyedfoku polinom: $x_1x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_3 - x_2x_3 + x_2 - 4$. Azert negyedfoku, mert ha letoroljuk az also indexeket (azaz x_1, x_2, x_3 helyebe mind x-et irunk), akkor x negyedfoku polinomjat kapjuk.

Egy n-valtozos masodfoku polinom altalanos alakja: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c$

Homogen masodfoku polinom: ha nincsenek elsofoku es nulladfoku tagjai: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j$

Homogen masodfoku polinom=kvadratikus alak

9. feladatsor, 10. feladat/a) megoldasa:

$$9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3 = \begin{matrix} 9x_1x_1+ & 3x_1x_2+ & -4x_1x_3+ \\ 3x_2x_1+ & -x_2x_2+ & \frac{1}{2}x_2x_3+ \\ -4x_3x_1+ & \frac{1}{2}x_3x_2+ & 4x_3x_3 \end{matrix} =$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

9. feladatsor, 12. feladat/b) megoldasa

$$5x_1^2 \quad + \quad 2x_2^2 \quad + \quad 4x_1x_2 \quad = \quad \begin{matrix} 5x_1x_1+ & 2x_1x_2+ \\ 2x_2x_1+ & 2x_2x_2 \end{matrix} \quad = \quad (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hatarozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ szimmetrikus matrix sajatertekeit:

$$\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

Tehat a sajatertekek $\lambda_1 = 1$ es $\lambda_2 = 6$.

A $\lambda_1 = 1$ sajatertekhez tartozo sajatvektor-egyenlet

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azaz $x_2 = -2x_1$. Tehat egy sajatvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. De ne ezt a sajatvektort vegyuk, hanem azt, amelyik egyseghosszu! Emennek a hossza $\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, osszuk le a hosszaval es akkor megkapjuk a $\lambda_1 = 1$-hez tartozo egyseghosszu sajatvektort: $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

A $\lambda_2 = 6$ sajatertekhez tartozo sajatvektor-egyenlet

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azaz $2x_2 = x_1$. Tehat egy sajatvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De ne ezt a sajatvektort vegyuk, hanem azt, amelyik egyseghosszu! Emennek a hossza $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, osszuk le a hosszaval es akkor megkapjuk a $\lambda_2 = 6$-hez tartozo egyseghosszu sajatvektort: $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Ha ebbol a ket oszlopvektorbol osszerakjuk a $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrixot, akkor az valoban ortogonalis:

$$P^T P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Tehat ekkor $D = P^T A P$, azaz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Keressuk meg azt az ortogonalis transzformaciot, amellyel a kvadratikus alak negyzetosszegge transzformalhato es irjuk fel a kvadratikus alakot az uj valtozok segitsegevel!

Mivel $D = P^T A P$, igy $PDP^T = A$. Az uj meroleges koordinatarendszerunk bazisvektorai $\underline{v}_1$ es $\underline{v}_2$. Tehat ha egy pont uj koordinatai $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, akkor a regi koordinatai $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$. Mivel $P^T = P^{-1}$, igy $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = P^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$(x_1, x_2) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2) \cdot PDP^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1', x_2') \cdot D \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

Azaz legyenek $x_1' = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2$ es $x_2' = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2$. Tehat a kvadratikus alak az uj valtozok segisegevel kifejezve:

$$(x_1')^2 + 6(x_2')^2$$

Es az ellenorzes:

$$(x_1')^2 + 6(x_2')^2 = (\frac{1}{\sqrt{5}} x_1 - \frac{2}{\sqrt{5}} x_2)^2 + 6(\frac{2}{\sqrt{5}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} x_2)^2 =$$
$$\frac{1}{5} x_2^2 - \frac{4}{5} x_1 x_2 + \frac{4}{5} x_2^2 + 6 \left(\frac{4}{5} x_1^2 + \frac{4}{5} x_1 x_2 + \frac{1}{5} x_2^2 \right) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2^2$$

Tehat visszakaptuk azt a kvadratikus alakot, ami a feladat kituzeseben is szerepelt.