

Még néhány $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ feladat megoldása:

Gyakorlaton nem vettük, de van még egy hasznos kritérium annak eldöntésére, hogy a végtelen sor konvergens-e vagy divergens. Az a neve, hogy **limesz-összehasonlító kritérium**:

Legyen $a_n > 0$, $b_n > 0$. Azt kell eldönteni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens-e vagy divergens. Mivel a sor nemnegatív, így azt kell eldönteni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ vagy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ teljesül (az első eset a konvergens, a második a divergens). Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ olyan, hogy $0 < c < +\infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akkor és csak akkor lesz konvergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is konvergens (és $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akkor és csak akkor lesz divergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens). Képlettel:

$$0 < a_n, 0 < b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c, 0 < c < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$$

Tipikus alkalmazások:

4/(d) feladat az első gyakorlat feladatsoráról: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ konvergens vagy divergens? Tehát $a_n = \frac{1}{2n-1}$. Legyen $b_n = \frac{1}{2n}$ (azaz feledkezzünk meg a zavaró tagról). Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1$. Teljesülnek a limesz-összehasonlító kritérium feltételei ($0 < 1 < +\infty$), így elég eldönteni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergens-e vagy divergens, de azt meg tudjuk, hogy a harmonikus sor (így hívják a természetes számok reciprokösszegeiből képzett sort) divergens: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^4-2n+4}$ konvergens vagy divergens? Tehát $a_n = \frac{n+1}{n^4-2n+4}$. Legyen $b_n = \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$ (azaz feledkezzünk meg a zavaró tagokról). Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4+n}{n^4-2n+4} = 1$. Teljesülnek a limesz-összehasonlító kritérium feltételei, így elég eldönteni, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergens-e vagy divergens, de azt meg tudjuk, hogy a köbszámok reciprokösszege véges, azaz a sor konvergens.

Leibniz-kritérium: Még egy kritérium annak az eldöntésére, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens-e vagy divergens. Ha $|a_n|$ monoton csökkenő módon tart nullához és $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 > 0, a_4 < 0, \dots$, tehát ha a sor minden második eleme pozitív, a többi meg negatív, akkor a sor konvergens.

Példák:

4/(j) feladat: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens, hiszen $\frac{1}{n}$ monoton csökkenő módon tart nullához, és az előjelek alternálnak, tehát alkalmazható a Leibniz-kritérium.

4/(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ konvergens vagy divergens? Nem alkalmazható a Leibniz-kritérium, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)^n \frac{n+1}{n+2} \right| = 1$, tehát az összeadandók abszolútértéke nem tart nullához. A sor divergens, pontosan emiatt.