ÉP II., 3. ZH, 1) csoport:

① Határozza meg az $f(x,y)=\dfrac{xy+12}{x^2+y-8}$ kétváltozós függvény $P(-2,5)$ pontbeli $\underline{v}=(4,-3)$ irányú iránymenti deriváltját!:

$\|\underline{v}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$, $\underline{e}=\dfrac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|}=\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{3}{5}\right)$ 1p

$f'_x(x,y)=\dfrac{\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy+12)\right)\cdot(x^2+y-8)-(xy+12)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y-8)\right)}{(x^2+y-8)^2}=$ 1p 2p

$=\dfrac{y\cdot(x^2+y-8)-(xy+12)\cdot 2x}{(x^2+y-8)^2}$

$f'_x(-2,5)=\dfrac{5\cdot((-2)^2+5-8)-((-2)\cdot 5+12)\cdot 2\cdot(-2)}{((-2)^2+5-8)^2}=$

$=13$ ← 1p

$f'_y(x,y)=\dfrac{x\cdot(x^2+y-8)-(xy+12)\cdot 1}{(x^2+y-8)^2}$ 1p

$f'_y(-2,5)=\dfrac{(-2)\cdot(1)-(2)\cdot 1}{1}=-4$ ← 1p

Iránymenti derivált: $f'_{\underline{e}}(-2,5)=\dfrac{4}{5}\cdot 13+\left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot(-4)=\dfrac{64}{5}$ 1p!

② Határozza meg az $f(x,y)=32x^2-x^4-y^2+2y+1$ függvény lokális nélsőértékeit és nyeregpontjait!

$f'_x(x,y)=64x-4\cdot x^3$ 1p || $f'_y(x,y)=-2y+2$ 1p

Stacionárius pontok: $\left.\begin{matrix}64x-4x^3=0\\-2y+2=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$ $16=x^2\Leftrightarrow x=\pm 4$ vagy $x=0$, $y=1$ 1p

$P_1(-4,1)$, $P_2(4,1)$, $P_3(0,1)$ 1p

$f''_{yy}(x,y)=-2$ $f''_{xy}(x,y)=0$ $f''_{xx}(x,y)=64-12x^2$ 1p

$P_1(-4,1)$ 1p

$H=\begin{vmatrix}-128 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}$

$\det(H)>0$

$f''_{xx}(-4,1)<0$

LOK MAX

$P_2(4,1)$ 1p

$H=\begin{vmatrix}-128 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}$

LOK MAX

$P_3(0,1)$ 1p

$H=\begin{vmatrix}64 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}$

$\det(H)<0$

NYEREG PONT

(3) Számítsa ki az alábbi kettősintegrált, ha a T tartomány az $y = \frac{1}{x+5}$ görbe, az x tengely, valamint az $x = 5$ és az $x = 10$ egyenesek által határolt tartomány.

$$\iint_T 2xy \cdot (x+5)\, dx\, dy = \iint_T 2xy \cdot (x+5)\, d\text{Terület} =$$

$$= \int_5^{10} \int_0^{1/(x+5)} 2xy \cdot (x+5)\, dy\, dx = \int_5^{10} x \cdot (x+5) \cdot \int_0^{1/(x+5)} 2y\, dy\, dx =$$

$$= \int_5^{10} x \cdot (x+5) \cdot \left[y^2 \right]_0^{1/(x+5)} dx = \int_5^{10} x \cdot (x+5) \cdot \left(\left(\frac{1}{x+5} \right)^2 - 0^2 \right) dx =$$

$$= \int_5^{10} \frac{x}{x+5}\, dx = \int_5^{10} \frac{x+5-5}{x+5}\, dx = \int_5^{10} 1 - \frac{5}{x+5}\, dx =$$

$$= \left[x - 5 \cdot \ln(x+5) \right]_5^{10} = \left(10 - 5 \cdot \ln(15)\right) - \left(5 - 5 \cdot \ln(10)\right) =$$

$$= 5 + 5 \cdot \left(\ln(10) - \ln(15) \right) = 5 + 5 \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

ÉP 2., 3. ZH, É sopron:

① $f(x,y) = \dfrac{xy-6}{x^2+y+8}$ $\qquad (x_0, y_0) = (-1, -8)$

$$f'_x(x,y) = \frac{y\cdot(x^2+y+8) - (xy-6)\cdot(2x)}{(x^2+y+8)^2} = \frac{(-8)\cdot(1-8+8) - (8-6)\cdot(-2)}{1}$$

$$= -8 + 4 = \boxed{-4}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x\cdot(x^2+y+8) - (xy-6)\cdot 1}{(x^2+y+8)^2} = \frac{(-1)\cdot(1) - (8-6)\cdot 1}{1} =$$

$$= \boxed{-3}$$

Iránymenti deriváltak:

$$\frac{3}{5}\cdot(-4) + \frac{-4}{5}\cdot(-3) = 0$$

---

② $f(x,y) = 18x^2 - x^4 - y^2 + 4y + 3$

$f'_x = 36x - 4x^3 \longrightarrow x = 0, -3, 3$

$f'_y = -2y + 4 \qquad y = 2$

$f''_{xx} = 36 - 12x^2$

$f''_{yy} = -2$

$f''_{xy} = 0$

$(-3, 2)$: $H = \begin{vmatrix} \ominus & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ $\in$ MAX

$(3, 2)$: MAX

$(0, 2)$: NYEREG

---

③ $$\int_4^8 \int_0^{1/x+4} 2xy\cdot(x+4)\,dy\,dx = \int_4^8 x\cdot(x+4)\cdot\frac{1}{(x+4)^2}\,dx = \int_4^8 \frac{x}{x+4}\,dx =$$

$$= \Big[x - 4\cdot\ln(x+4)\Big]_4^8 = \big(8 - 4\cdot\ln(12)\big) - \big(4 - 4\cdot\ln(8)\big) = 4 + 4\cdot\ln\left|\frac{3}{2}\right|$$

ÉP II., 3.ZH, A CSOKORT

① Határozza meg a $z = x \cdot y \cdot (x-5) \cdot (y-5)$ függvény $P(1,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét:

$f(x,y) = x \cdot y \cdot (x-5) \cdot (y-5) = (x^2 - 5x) \cdot (y^2 - 5y)$ 1p

$f'_x(x,y) = (2x-5) \cdot (y^2 - 5y)$ 2p $\quad\|\quad f'_y(x,y) = (x^2-5x) \cdot (2y-5)$ 1p

$(x_0, y_0) = (1,2) \qquad f(x_0, y_0) = 1 \cdot 2 \cdot (1-5) \cdot (2-5) = 24 = z_0$ 1p

$f'_x(x_0, y_0) = (2 \cdot 1 - 5) \cdot (4 - 10) = 18 \quad\|\quad f'_y(x_0, y_0) = (1-5) \cdot (4-5) = 4$ 1p

Érintősík: $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

$$\boxed{z - 24 = 18 \cdot (x-1) + 4 \cdot (y-2)}$$ 3p

---

② Keresse meg az $f(x,y) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2y^2$ függvény szélsőértékeit és nyeregpontjait!:

$f'_x(x,y) = 3x^2 + 12x + 9 \quad\|\quad f'_y(x,y) = 4y \quad\|\quad f''_{xx}(x,y) = 6x + 12$ 2p

$f''_{yy}(x,y) = 4 \quad\|\quad f''_{xy}(x,y) = 0$

Stacionárius pont: $\left.\begin{array}{l} 3x^2 + 12x + 9 = 0 \\ 4y = 0 \end{array}\right\}$ $x_{1,2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{6}$ 1p $\quad\nearrow -1 \quad\searrow -3$

↳ $(-1,0)$ és $(-3,0)$ a stacionárius pontok 1p

$(-1,0) \rightarrow H = \begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 0 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline \end{array}$ LOK MIN 2p $\quad\|\quad (-3,0) \rightarrow H = \begin{array}{|c|c|}\hline -6 & 0 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline \end{array}$ NYEREG 2p

---

③ Számítsa ki az alábbi kettősintegrált, ahol a T tartomány az $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,2)$, $D(0,10)$ pontok által meghatározott trapéz: $\iint_T \frac{2y}{(5-x)^3}\,dx\,dy \overset{3p}{=} \int_0^4 \int_0^{10-2x} \frac{2y}{(5-x)^3}\,dy\,dx =$

$= \int_0^4 \frac{1}{(5-x)^3} \cdot \int_0^{10-2x} 2y\,dy\,dx \overset{2p}{=} \int_0^4 \frac{1}{(5-x)^3} \cdot \left[y^2\right]_0^{10-2x} dx \overset{1p}{=} \int_0^4 \frac{1}{(5-x)^3} \cdot (10-2x)^2\,dx =$

$\overset{1p}{=} \int_0^4 \frac{4}{5-x}\,dx \overset{1p}{=} 4 \cdot \left[-\ln(5-x)\right]_0^4 = 4 \cdot (\ln(5) - \ln(1)) \overset{1p}{=} \boxed{4 \cdot \ln(5)}$

ÉP 11. | 3. ZH, F sopron:

① $f'_x = \frac{y\cdot(x^2+y+4) - (xy-2)\cdot(2x)}{(x^2+y+4)^2} = \frac{(-4)\cdot 1 - 2\cdot(-2)}{1} =$

$= \boxed{0}$

$f'_y = \frac{x\cdot(1) - (xy-2)\cdot 1}{1} = \frac{(-1)\cdot 1 - (4-2)\cdot 1}{1} =$

$= -1-2 = \boxed{-3}$

irányvektor $\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot(-3) = \frac{-3}{\sqrt{10}}$

② $f'_x = 16x - 4\cdot x^3$ $\quad 16x = 4x^3 \quad y = x^2$

$f'_y = -2y + 6 \rightarrow \boxed{y = 3}$ $\quad x = 0$

$\boxed{x = \pm 2,\ 0}$

$f''_{xx} = 16 - 12x^2$

$f''_{yy} = -2$

$(0,3)$:

16	0
0	-2

NYEREG

$(-2,3)$:

-32	0
0	-2

MAX

③ $\int_3^6 \int_0^{1/(x+3)} 2x\cdot y\cdot(x+3)\,dy\,dx = \int_3^6 x\cdot(x+3)\cdot\frac{1}{(x+3)^2}\,dx =$

$= \int_3^6 1 - \frac{3}{x+3}\,dx = \left[x - 3\cdot\ln(x+3)\right]_3^6 = 3 + 3\cdot\ln\left|\frac{2}{3}\right)$