8.7 Megoldása: Az **5b.12** megoldása (lásd a kedden kiosztott fénymásolt lapokon a **7.5** megoldását) alapján tudjuk, hogy

$$\mathbf{E}\big(1\!\!1_{\{X_i=y\}} \mid \mathcal{F}_{i-1}\big) = P_{X_{i-1},y} = \sum_{x\in S} 1\!\!1_{\{X_{i-1}=x\}} P_{x,y}$$

Vegyük észre, hogy $X_T = X_0 = z$ miatt $\sum_{i=1}^{T} 1\!\!1_{\{X_i=y\}} = \sum_{i=0}^{T-1} 1\!\!1_{\{X_i=y\}}$.

A **8.7** végén írt segítség és a martingál-megállítási tétel alapján alapján

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{T} \left(1\!\!1_{\{X_i=y\}} - \mathbf{E}\big(1\!\!1_{\{X_i=y\}} \mid \mathcal{F}_{i-1}\big)\right)\right) = \mathbf{E}(M_0) = 0$$

Átrendezve ezt: $\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{T} 1\!\!1_{\{X_i=y\}}\Big) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{T} \mathbf{E}\big(1\!\!1_{\{X_i=y\}} \mid \mathcal{F}_{i-1}\big)\right)$, tehát

$$r(y) = \mathbf{E}\Big(\sum_{i=0}^{T-1} 1\!\!1_{\{X_i=y\}}\Big) = \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{T} 1\!\!1_{\{X_i=y\}}\Big) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{T} \mathbf{E}\big(1\!\!1_{\{X_i=y\}} \mid \mathcal{F}_{i-1}\big)\right) =$$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{T} \sum_{x\in S} 1\!\!1_{\{X_i=x\}} P_{x,y}\right) = \sum_{x\in S} \mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{T} 1\!\!1_{\{X_{i-1}=x\}} P_{x,y}\Big) = \sum_{x\in S} \mathbf{E}\Big(\sum_{i=0}^{T-1} 1\!\!1_{\{X_i=x\}} P_{x,y}\Big) = \sum_{x\in S} r(x) P_{x,y}$$

8.10 Megoldása: Legyen $X_i = 1\!\!1[$ az i-ediknek felmutatott lap piros $]$, ahol $1 \le i \le 52$.

Egyrészt "most piros" játék egy stratégiája egy T "jósolható megállási idő", a következő értelemben: $\mathbf{P}(1 \le T \le 52) = 1$ és $\{T = i\} \in \sigma(X_1, \ldots, X_{i-1})$, hiszen az első $i-1$ lapot látva hozza meg a játékos azt a döntést, hogy az i-edik lapnál mondja, hogy "most piros".

Másrészt vegyük észre, hogy tetszőleges $1 \le i \le 52$-ra $\mathbf{E}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) = \mathbf{E}(X_{52} \mid X_1, \ldots, X_{i-1})$, hiszen ha egy jól megkevert kártyapakli első $i-1$ kártyáját megmutatják, akkor a maradék is egy jól megkevert kártyapakli.

Így a feltételes várhatóértéket definiáló azonosság miatt (lásd TB szto.foly. jegyzetének 62. oldalán) $\mathbf{E}(X_i 1\!\!1_{\{T=i\}}) = \mathbf{E}(X_{52} 1\!\!1_{\{T=i\}})$, azaz $\mathbf{P}(X_i = 1 \text{ és } T = i) = \mathbf{P}(X_{52} = 1 \text{ és } T = i)$.

Emiatt annak a valószínűsége, hogy a T stratégiával pirosat talál a játékos:

$$\mathbf{P}(X_T = 1) = \sum_{i=1}^{52} \mathbf{P}(X_i = 1 \text{ és } T = i) = \sum_{i=1}^{52} \mathbf{P}(X_{52} = 1 \text{ és } T = i) = \mathbf{P}(X_{52} = 1) = \frac{1}{2}$$

Tehát akármi a stratégia, a nyerési valószínűség $\frac{1}{2}$.