Sztochasztikus folyamatok
1. feladatsor
A Markov-tulajdonság

1.1 Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként $1/3$ valószínűséggel, valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

(a) Ésszerű-e Markov lánccal modellezni a folyamatot? Ha igen, azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát.

(b) Vasárnap este üres volt az újságkupac. Mekkora valószínűséggel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban? Számítsa ki esetszétválasztással és mátrix hatványozással is.

1.2 Írjuk le egy olyan elágazó folyamat átmenet mátrixát, amelyben az egyes egyedek leszármazottainak száma geometriai eloszlású. (E Markov lánc állapottere nem véges, hanem megszámlálható végtelen — no de sebaj!)

1.3 (Bernoulli-Laplace urnamodell keverésre)
Két urnában vannak golyóink: N darab mindkettőben. A golyók közül N kék és N piros. A golyókat a következő képpen keverjük: időegységenként kiválasztunk véletlenszerűen egy-egy golyót mindkét urnából és a kettőt kicseréljük. (Az egyes urnákban lévő golyók száma nem változik, de a színek eloszlása igen.) Írjuk le a folyamat S állapotterét és P átmenet mátrixát.

1.4 *Markov-lánc kontrakció*

(a) Az X_t diszkrét idejű Markov lánc állapotainak halmaza $S = \{1, 2, 3\}$, átmenet mátrixa pedig

$$P = \begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 3/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$

A kezdeti $t = 0$ időpillanatban a lánc állapotainak eloszlása tetszőleges μ_0. Legyen

$$Y_t = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad X_t = 1 \\ 2 & \text{ha} \quad X_t \neq 1. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az Y_t folyamat szintén Markov láncot alkot és számítsuk ki az átmenet mátrixát.

(b) Legyen $X_1, X_2, \ldots$ homogén Markov-lánc az S véges állapottéren, P átmenetmátrixszal. Legyen $\varphi : S \to \hat{S}$, nem feltétlenül injektív leképezés. Fogalmazzon meg egyszerű feltételt P-re, hogy $Y_1, Y_2, \ldots$ is Markov-lánc legyen, ahol $Y_i := \varphi(X_i)$. Adja meg az új Markov-lánc átmenetmátrixát.

(c) Legyen S az a $\binom{2n}{n}$-elemű halmaz, aminek az elemei a Bernulli-Laplace urna lehetséges konfigurációi. Tekinsük ezen az állapottéren a B-L modell keverési modell dinamikáját. Legyen φ az a függvény, ami megmondja az első n urnában levő piros golyók számát. Mutassuk meg, hogy teljesülnek a Markov-lánc kontrakció feltételei.

1.5 Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ olyan valószínűségi változó-sorozat, amire $X_i \in S$, ahol S megszámlálható. Lássa be, hogy a következő három feltétel ekvivalens:

(a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Markov-lánc: Minden k-ra

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = s_{k+1} | X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k) = \mathbf{P}(X_{k+1} = s_{k+1} | X_k = s_k)$$

(b) Vannak olyan $P^1, \ldots, P^{n-1}$ sztochasztikus mátrixok (a felső index itt nem hatványt jelöl!), amikre

$$\mathbf{P}(X_1 = s_1, \ldots, X_k = s_k) = \mathbf{P}(X_1 = s_1) \prod_{i=1}^{k-1} P^i_{s_i, s_{i+1}}$$

(c) A jelen ismeretében múlt és jövő függetlenek, azaz minden k-ra és minden $M \subseteq S^{k-1}$, $J \subseteq S^{n-k}$ és $s_k \in S$ esetén

$$\mathbf{P}\big((X_1, \ldots, X_{k-1}) \in M \text{ és } (X_{k+1}, \ldots, X_n) \in J | X_k = s_k\big) =$$
$$\mathbf{P}\big((X_1, \ldots, X_{k-1}) \in M | X_k = s_k\big)\mathbf{P}\big((X_{k+1}, \ldots, X_n) \in J | X_k = s_k\big)$$

1.6 Legyen X_t, $t \in \mathbb{N}$, Markov lánc, melynek állapottere S véges halmaz. Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$ állapotok részhalmazai és $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ rögzített időpontok. Következik-e a Markov tulajdonságból, hogy

$$\mathbf{P}(X_{t_n} \in A_n | X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_{n-1}} \in A_{n-1}) = \mathbf{P}(X_{t_n} \in A_n | X_{t_{n-1}} \in A_{n-1})?$$

1.7 Legyen $X_0, X_1, \ldots, X_n$ homogén, véges állapotterű Markov-lánc μ_0 kezdeti eloszlással es P átmenetmátrixszal. Mutassuk meg, hogy a $Y_i = X_{n-i}$ megfordított folyamat is egy (nem feltétlenül homogén) Markov-lánc! Adjuk meg a kezdeti eloszlását és az átmenetmátrixokat (mátrix-műveletek segítségével). Mutassuk meg, hogy az átmenetmátrixok valóban sztochasztikusak, azaz a sorösszegeik 1-et adnak.

1.8 Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(\xi_j = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_j = 0)$. Legyen $X_n := \xi_n + \xi_{n+1} + \xi_{n+2}$. Markov lánc-e az X_n, $n \in \mathbb{N}$, valószínűségi változó sorozat?

1.9 A ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}(\xi_t = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(\xi_t = -1)$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:
(a) $X_t := \xi_t \xi_{t+1}$;
(b) $Y_t := \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_t$;
(c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1, -1) = 1$, $\Phi(-1, 1) = 2$, $\Phi(1, -1) = 3$, $\Phi(1, 1) = 4$.
A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.

1.10 Osztályozzuk az alábbi Markov láncok állapotait
(a)

$$S = \{1, 2, 3\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$S = \{1,2,3,4\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$S = \{1,2,3,4,5\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.11 Bizonyítandó, hogy azonos irreducibilis komponenshez tartozó állapotoknak azonos a periódusa.

1.12 (a) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású pozitív egész értékű valószínűségi változók $F(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Legyen

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } \exists n, \text{ hogy } S_n = k, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Legyen $u_k = \mathbf{P}(Y_k = 1)$. $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k =?$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n =?$