# Sztochasztikus folyamatok
# 2. feladatsor
# Véges Markov láncok stacionárius eloszlása

**2.1** Legyen $X_n$ egy diszkrét $S$ állapotterű Markov lánc, melynek átmenet mátrixa $(P_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta\in S}$ és kezdeti eloszlása: $\mathbf{P}(X_0 = \alpha) = \pi(\alpha)$.

(a) Bizonyítandó, hogy az $X_t$ Markov lánc, mint sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor stacionárius, ha $\sum_{\alpha\in S} \pi(\alpha)P_{\alpha,\beta} = \pi(\beta)$.

(b) Mutassa meg, hogy stacionárius Markov lánc megfordítottja is stacionárius Markov lánc. Mi a megfordított Markov lánc átmenetmátrixa? Milyen összefüggést kell teljesítenie a Markov lánc stacionárius eloszlásának és átmenetmátrixának ahhoz, hogy a megfordított sztochasztikus folyamat ugyanolyan eloszlású legyen, mint az eredeti? Megj: az ilyen Markov láncokat *reverzibilisnek* nevezzük.

**2.2** Legyen $X_1, X_2, \ldots$ irreducibilis Markov lánc az $S$ véges állapottéren. Lássa be, hogy $Y_i := (X_i, X_{i+1})$ is irreducibilis Markov lánc a $G = \{(x_1, x_2) : P_{x_1,x_2} > 0\}$ állapottéren. Mi az így származtatott Markov lánc átmenetmátrixa, stacionárius eloszlása? Igaz-e hogy ha az eredeti Markov lánc reverzibilis, akkor a származtatott Mrkov lánc is reverzibilis?

**2.3** Dobókockát azonos valószínűséggel és az előző mozgatásoktól függetlenül, diszkrét időegységenként átfordítjuk az egyik oldaláról a szomszédos négy oldal valamelyikére. Írjuk le a Markov lánc átmenetvalószínűségeinek mátrixát és találjuk meg a stacionárius eloszlását.

**2.4** Legyen $G$ olyan irányítatlan véges gráf, ami esetleg tartalmaz hurokéleket és párhuzamos éleket. A bolyongó mindig egyenletesen választ az aktuális csúcsból kiinduló utak közül (tehát a hurokélek duplán számítanak). Mi a bolyongás stacionárius eloszlása?

**2.5** Tekintsük azt a bolyongást az $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ állapottéren. ami a szélekről mindig 1-el beljebb lép, a belső pontokban pedig $\frac{1}{3}$ valószínűséggel balra, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel jobbra lép. Mi a stacionárius eloszlás?

**2.6** *A Boze-Einstein-eloszlás, avagy Markov lánc Monte Carlo*

Egy bűvésznek van $r$ doboza és $n$ megkülönböztethetetlen nyula. Minden másodpercben mindkét kezével egyszerre belenyúl valamelyik kalapba (a két kézzel egymásól függetlenül, mindkettővel egyenletesen választ kalapot). Ha a bal kézre eső kalapban van nyúl, akkor átteszi a jobb kézre eső kalapba, egyébként pedig nem csinál semmit. Hosszú idő elteltével mekkora lesz egy adott nyúl-konfiguráció valószínűsége?

**2.7** Tekintsünk egy Markov láncot a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ hatelemű állapottéren, melynek átmenet mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.3 & 0.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.9 & 0.0 \\ 0.25 & 0.25 & 0.0 & 0.0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.0 & 0.0 & 0.7 & 0.0 & 0.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.2 & 0.0 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Azonosítsuk a Markov lánc irreducibilis osztályait. Melyek ezek közül lényegesek és melyek a lényegtelenek? Tegyük fel, hogy a lánc $n = 0$ időpontban a 0 állapotból indul. Mennyi annak a valószínűsége, $n \gg 1$ (nagyon kései) időpontban a 0 állapotban lesz? Válaszoljuk mg ugyanezt a kérdést, ha feltesszük, hogy a Markov lánc $n = 0$-kor az 5 állapotból indul.

**2.8** Legyen $X_n$ irreducibilis Markov lánc az $\{1, 2, \ldots, N\}$ állapottéren. Bizonyítsuk be, hogy léteznek $C < \infty$ és $\rho < 1$ konstansok, úgy, hogy bármely $i$ és $j$ állapotokra

$$\mathbf{P}\big(X_m \neq j, m = 0, 1, \ldots, n \big| X_0 = i\big) \leq C\rho^n.$$

Mutassuk meg, hogy ebből következik $\mathbf{E}\big(T\big) < \infty$, ahol $T$ a $j$ állapot első elérésének ideje.

*Útmutatás:* Létezik $\delta > 0$, úgy, hogy bármely $i$ és $j$ állapotokra, annak a valószínűsége, hogy $i$-ből indulva az első $N$ lépés során a Markov lánc eléri a $j$ állapotot, nagyobb, mint $\delta$. Miért?

**2.9** Tekintsük azt a Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{x, y, z\}$ és átmenet-mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

(a) Határozza meg a stacionárius eloszlást!

(b) Az $x$-ből indított Markov-lánc várhatóan hányat lép, amíg $y$-ba ér? Határozza meg a megtett lépések számának eloszlását is!

(c) Az $x$-ből indított Markov-lánc várhatóan hányszor jár $z$-ben, mielőtt $y$-ba érne? Számolja ki kétféleképpen is!

**2.10** Tekintsünk egy Markov láncot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ötelemű állapottéren, melynek átmenetmátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Irreducibilis-e a Markov lánc?

(b) Mennyi a periódusa a Markov láncnak?

(c) Számoljuk ki közelítőleg a $P_{2,1}^{(1000)}$, $P_{2,2}^{(1000)}$ és $P_{2,4}^{(1000)}$ ezer lépéses átmenet valószínűségeket.

(d) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul és jelöljük $T$-vel az 1-be való első visszatérés idejét. Számoljuk ki $T$ eloszlását és várható értékét. Minden további számolás nélkül adjuk meg $\pi(1)$-et (heurisztikusan).

(e) Számoljuk ki az invariáns (stacionárius) eloszlást. Ennek ismeretében mondjuk meg (heurisztikusan), hogy mennyi az első visszatérés idejének várható értéke, feltéve, hogy a folyamat a 2 állapotból indult.

**2.11** Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ egymásutáni kockadobások számszerű eredményei és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Legyen

$$T_1 = \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható 8-cal}\},$$
$$T_2 = \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható 8-cal}\}.$$

Számoljuk ki $\mathbf{E}(T_1)$-et és $\mathbf{E}(T_2)$-t.

*Útmutatás:* Tekintsük ($S_n$ mod 8)-at mint Markov láncot $\{0, 1, 2, \ldots, 7\}$-en.

**2.12** *A felújítási paradoxon*

Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független és $X$-el azonos eloszlású, pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változók (ú.n. felújítási idők), és tegyük fel hogy $\mathbf{P}(X \leq M) = 1$ valamilyen $M \in \mathbb{N}$-re. Legyen $1 \leq x \leq M$-re $p_x := \mathbf{P}(X = x)$. $T_0 = 0$, $T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$ (felújítási időpontok). Legyen $\alpha_n$ a legutóbbi felújítás óta eltelt idő az $n$ időpontban, $\beta_n$ pedig a következő felújítási időpontig hátralevő idő (és ha $n = T_k$ maga egy felújítási időpont, akkor legyen $\alpha_n = 0$, $\beta_n = X_{k+1}$). Legyen $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ annak a felújítási intervallumnak a hossza, amibe $n$ beleesik.

(a) Mutassa meg, hogy $Y_n := (\alpha_n, \beta_n)$ Markov láncot alkot. Milyen feltétel kell, hogy teljesüljön $X$ eloszlására, hogy a Markov lánc aperiodikus legyen?

(b) Ha aperiodikus a Markov lánc, milyen lesz $1 \ll n$-re mi $\gamma_n$ eloszlása? A stacionárius állapotban mi $\mathbf{P}(\alpha = y | \gamma = x)$, azaz rögzített $\gamma$ mellett mi az $\alpha$ feltételes eloszlása?

**2.13** Legyen $X_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ irreducibilis Markov lánc a *véges* $S$ állapottéren, melynek átmenetmátrixát jelöljük $P$-vel. Legyen

$$T := \min\{n > 0 : X_n = X_0\}$$

a kezdő állapotba való első visszatérés ideje. Tegyük fel, hogy a kezdeti állapot $X_0 = i$ és minden $j \in S$-re legyen

$$r(j) := \mathbf{E}\Big(\sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_n = j\}}\Big),$$

a kezdő állapotba való első visszatérés előtt a $j$ állapotban töltött idő várható értéke. Vegyük észre, hogy ha $X_0 = i$, akkor $r(i) = 1$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{j \in S} r(j) P_{j,i} = r(i),$$

azaz az $r(j)$ számokból képezett sorvektor az 1 sajátértékhez tartozó baloldali sajátvektora a Markov lánc $P$ átmenetmátrixának.

(b) A fenti megjegyzésből vezessük le a

$$\pi(i) = \big(\mathbf{E}\big(T \big| X_0 = i\big)\big)^{-1}$$

azonosságot, ahol $\pi$ a Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlása.

**2.14** Tekintsük az 1.1 feladatban leírt Markov láncot (Kovácsék ujságos kupaca ...).

(a) Hosszú idő után mennyi a kupacban lévő újságok számának várható értéke?

(b) Tegyük fel, hogy kezdetben 0 újság van a kupacban. Várhatóan hány nap múlva lesz újból üres a kupac?

**2.15** Legyen $X_n$ Markov lánc az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ötelemű állapottéren, melynek átmenetmátrixa:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(a) Irreducibilis-e a Markov lánc? Aperiodikus-e a Markov lánc?

(b) Határozzuk meg a Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.

(c) Tegyük fel, hogy $X_0 = 1$. Mennyi az 1 állapotba való első visszatérésig megtett lépések számának várható értéke?

(d) Újból tegyük fel, hogy $X_0 = 1$ Mennyi a 4 állapot első eléréséig megtett lépések számának várható értéke?

(e) Ugyancsak $X_0 = 1$ kezdeti feltétel mellett, mennyi annak a valószínűsége, hogy a folyamat előbb éri el az 5 állapotot, mint a 3-at?

**2.16** Határozzuk meg az Ehrenfest urna modell (kutyák és bolhák ...) stacionárius eloszlását.

**2.17** Az $X_t$ diszkrét idejű Markov lánc állapotainak halmaza $S = \{1, 2, 3\}$, átmenetvalószínűségeinek mátrixa $P$, stacionárius eloszlása $\pi$. Mutassuk meg, hogy ha $P_{1,1} = P_{2,2} = P_{3,3}$ és $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3)$, akkor $P_{1,2} = P_{2,3} = P_{3,1}$ és $P_{1,3} = P_{3,2} = P_{2,1}$. Általánosítható-e az érvelés?

**2.18** (Bernoulli-Laplace keverési modell)

Két urnában szétosztunk $N$ fekete és $N$ fehér golyót úgy, hogy mindegyik urnába $N$ golyó kerüljön. Minden egész értékü $t$ időpillanatban véletlenszerűen kiválasztunk egy-egy golyót mindkét urnából és kicseréljük őket. Jelölje $X_t$ az első urnában lévő fehér golyók számát közvetlenül a $t$-edik golyó-csere után.

(a) Mutassuk meg, hogy $X_t$ Markov lánc és írjuk fel az egylépéses átmenetvalószínűségek mátrixát.

(b) Mutassuk meg, hogy az egyetlen stacionárius eloszlás

$$\pi(k) = \binom{N}{k}^2 \Big/ \binom{2N}{N}.$$