Sztochasztikus folyamatok
3. feladatsor
A spektrális rés / Megszámlálható Markov láncok

1 A spektrális rés

3.1 (a) Lássa be, hogy egy véges állapotterű, irreducibilis Markov átmenetmátrix spektrális rése akkor és csak akkor 1, ha van olyan $0 < m < +\infty$, hogy tetszőleges μ_0 kezdeti eloszlásból indítva az $X_1, X_2, \dots$ Markov-láncot, ha $n_2 - n_1 \geq m$, akkor X_{n_1} és X_{n_2} független valószínűségi változók.

(b) Mathematica segítségével számítsa ki a 0. feladatsor 3. feladatában definiált Markov-lánc átmenetmátrixának Jordan-féle normálalakját.

3.2 Tekintsük az $X_1, X_2, \dots$ véges állapotterű, irreducibilis Markov láncot, melynek átmenetmátrixa P és spektrális rése r. Tegyük fel, hogy mátrix sajátértékei mind különbözőek.

(a) Ha a Markov lánc stacionárius, mi a megfordított Markov lánc spektrális rése?

(b) Mi annak a "lusta" Markov láncnak a spektrális rése, aminek a bolyongója minden lépésben feldob egy szabályos érmét, és ha fej, akkor a P átmenetmátrix szerint lép egyet, ha pedig írás, akkor helyben marad?

(c) Mi az $X_2, X_4, X_6, \dots$ "ritkított" Markov-lánc spektrális rése?

(d) Mi annak a ritkított Markov láncnak a spektrális rése, amit úgy kapunk, hogy minden n-re X_n-et mindentől függetlenül p valószínűséggel töröljük?

(e) Legyen $Y_1, Y_2, \dots$ egy másik, az előbbitől teljesen független Markov lánc, aminek átmenetmátrixa Q és spektrális rése r_2. Mi a $Z_n =$

(X_n, Y_n) Markov lánc spektrális rése? Segítség: az új átmenetmátrix sajátvektorai mind összeeszkábálhatóak a régi mátrixok sajátvektoraiból.

3.3 Legyen $\varphi : S \to \hat{S}$ az $X_1, X_2, \dots \in S$ reverzibilis Markov lánc kontrakciója. Lássa be, hogy a $\varphi(X_1), \varphi(X_2), \dots$ Markov lánc spektrális rése nagyobb vagy egyenlő az eredeti Markov lánc spektrális résénél.

3.4 Határozza meg a 2. feladatsor 10. feladatában definiált Markov lánc összes 1 abszolútértékű sajátértékéhez tartozó jobb-és baloldali sajátvektorát.

3.5 Lássa be a 2. feladatsor 8. feladatának felhasználásaával, hogy ha P egy szigorúan szubsztochasztikus irreducibilis átmenetmátrix, azaz ha P elemei nemnegatívak, minden sorösszeg kisebb vagy egyenlő 1-nél, van olyan sor, aminek az összege kisebb, mint 1, és a $G := \{(x, y) : P_{x,y} > 0\}$ irányított gráf erősen összefüggő, akkor $I - P$ invertálható mátrix.

3.6 Vegyük azt a sztochasztikus mátrixot az $S = \{1, 2\}$ állapottéren, amire $P_{1,1} = \frac{1}{2}$, $P_{2,2} = \frac{3}{4}$. P^{100} elemei körülbelül hány tizedesjegyben térnek el $\lim_{n\to\infty} P^n$ elemeitől? $P^{100} =$?

3.7 Tekintsük azt az $X_1, X_2, \dots$ Markov-láncot, aminek az állapottere $S = \{1, 2, 3\}$ és átmenet-mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy $\mu_0(3) = 0$ teljesül a kezdeti eloszlásra.

(a) Körülbelül hány nullával kezdődik $\mathbf{P}(X_n \neq 3)$, ha $1 \ll n$?

(b) Lássa be, hogy az az $Y_1^n, Y_2^n, \dots, Y_n^n$ sztochasztikus folyamat is (nem feltétlenül homogén) Markov lánc, aminek állapottere $S = \{1, 2\}$ és aminek eloszlását a következő módon definiáljuk:

$$\mathbf{P}(Y_1^n = i_1, \dots, Y_n^n = i_n) := \mathbf{P}(X_i = i_1, \dots, X_n = i_n | X_n \neq 3)$$

Mik a $\mathbf{P}(Y_{k+1}^n = j | Y_k^n = i)$ átmenetvalószínűség-mátrixok?

(c) Fix k esetén számítsa ki a

$$\hat{P}_{i,j} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_{k+1} = j | X_k = i, X_n \neq 3)$$

átmenetvalószínűség-mátrixot.

3.8 *A diszkrét Fourier-transzformáció a konvolúciót szorzásba viszi*

Tekintsük az egyszerű, szimmetrikus bolyongást a modulo L maradékosztályokon, ahol L páratlan szám. Jelölje P a Markov lánc átmenetmátrixát. Ekkor

$$P_{x,y} = \frac{1}{2}\mathbb{1}[\, x \equiv y+1 \bmod L\,] + \frac{1}{2}\mathbb{1}\ [x \equiv y-1 \bmod L\,]$$

Legyen U az az $L \times L$-es mátrix, amire $U_{x,y} = \exp(2\pi i \frac{xy}{L})$, $0 \le x, y \le L-1$. Ellenőrízze, hogy $U^{-1} = \frac{1}{L}U^*$, ahol U^* az U konjugált transzponáltja. Mutassa meg, hogy $U^{-1}PU$ diagonális mátrix. Lássa be a L'Hospital-szabály segítségével, hogy P spektrális rése körülbelül $\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{L^2}$, ha $1 \ll L$.

2 Megszámlálható Markov láncok

3.9 Tekintsük a következő sorbanállási problémát: X_n a sorbanálló vásárlók száma n-kor. Minden $(n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ időintervallumban $p \in (0,1)$ valószínűséggel egy új vásárló érkezik és a sor végére áll. Ettől függetlenül, ugyanebben az időintervallumban a sor elején álló vásárlót $q \in (0,1)$ valószínűséggel kiszolgálják és ő elhagyja a sort. Legfeljebb egy új vásárló érkezhet és legfeljebb egy vásárlót szolgálnak ki egységnyi időintervallumonként. A különböző időintervallumokban történő események egymástól függetlenek.

(a) Markov lánc-e az X_n folyamat? Ha igen, írjuk le az állapotterét és átmenetmátrixát és állapítsuk meg, hogy irreducibilis-e, illetve, aperiodikus-e.

(b) Mely (p, q) paraméter értékekre lesz az X_n Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens illetve tranziens?

(c) A pozitív rekurrens esetben határozzuk meg a Markov lánc π stacionárius (invariáns) eloszlását. Mennyi a sor átlagos hossza a stacionárius állapotban? Segítség: Detailed balance...

(d) A tranziens esetben határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy kezdetben j hosszú sorral indulva, valaha is kiürül a sor.

3.10 Tekintsük a következő Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottéren. Adottak a $p_1, p_2, \dots$ pozitív számok melyek összege 1: $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$.

Ha a Markov lánc a 0 állapotba ér, a $\big(p_j\big)_{j=1}^{\infty}$ eloszlás szerint választja ki következő állapotát. Ha valamely $j > 0$ állapotban van, akkor determinisztikus módon a $j-1$ állapotba lép.
(a) Írjuk fel a Markov lánc átmenetmátrixát. Irreducibilis és aperiodikus-e a Markov lánc?
(b) A Markov lánc nyilvánvaló módon rekurrens. (Miért?) Milyen feltételnek kell a $\big(p_j\big)_{j=1}^{\infty}$ eloszlásnak eleget tennie ahhoz, hogy a Markov lánc pozitív rekurrens legyen?
Útmutatás: Számoljuk ki a 0-ba való első visszatérés idejének várható értékét.

3.11 Tekintsük az X_n Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottéren, melynek átmenet valószínűségei:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{P}\big(X_{n+1} = j+2 \big| X_n = j\big) = p, \\ \mathbf{P}\big(X_{n+1} = \max(j-1, 0) \big| X_n = j\big) = 1-p, \end{array}\right. \qquad j \in S.$$

Mely p értékekre lesz a Markov lánc tranziens, null rekurrens, illetve pozitív rekurrens? Segítség: generátorfüggvény-módszer!

3.12 Tekintsünk egy elágazó folyamatot, melynél egy szülő gyermekei számának eloszlása $\big(p_i\big)_{i=0}^{\infty}$. Ebből irreducibilis Markov láncot csinálunk, úgy, hogy ha a populáció kihal, a következő lépésben egy új egyedet ültetünk be kívülről. Mely $\big(p_i\big)_{i=0}^{\infty}$ eloszlásokra lesz az így értelmezett Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens?

3.13 Legyen X_n Markov lánc az $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ állapottéren, melynek átmenet mátrixa az alább megadottak egyike. Állapítsuk meg, mely esetekben lesz a Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens, illetve tranziens. A pozitív rekurrens esetekben számoljuk ki a stacionárius (invariáns) eloszlást.
(a) $P_{j,j+1} = (j+1)/(j+2)$, $P_{j,0} = 1/(j+2)$.
(b) $P_{j,j+1} = 1/(j+2)$, $P_{j,0} = (j+1)/(j+2)$.
(c) $P_{j,j+1} = (j^2+1)/(j^2+2)$, $P_{j,0} = 1/(j^2+2)$.

3.14 Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független és azonos eloszlású, egész értékű valószínűségi változók, melyeknek van várható értékük és $\mathbf{E}\big(X_i\big) = 0$. Legyen $S_0 = 0$ és

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

(Azaz: S_n bolyongás $\mathbb{Z}$-n, melynek egymásutáni lépései $X_1, X_2, \ldots$.)
Legyen továbbá

$$G_n(x) := \mathbf{E}\Big(\sum_{j=0}^{n} 1\!\!1_{\{S_j = x\}} \Big),$$

a $[0, n]$ időintervallumban az x rácsponton töltött részidő várható értéke. (E függvényt a bolyongás Green-függvényének nevezzük.)

(a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$G_n(0) \geq G_n(x).$$

Útmutatás: Tekintsük az x rácspont első elérésének idejét.

(b) Emlékezzünk a Nagy Számok Gyenge Törvényére: bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(|S_n| < \varepsilon n \Big) = 1.$$

Ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy rögzített $\varepsilon > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|x| < \varepsilon n} G_n(x) = 1.$$

(c) Az (a) és (b) pontok eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = \infty.$$

(d) A fentiek alapján lássuk be, hogy az S_n Markov lánc rekurrens.

(e) Alkalmazható-e a fenti okoskodás magasabb dimenziós bolyongásra?

3.15 Legyen $\big(p_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ valószínűségi eloszlás $\mathbb{Z}$-n, melyről feltesszük, hogy

$$p_1 > 0, \qquad p_k = 0, \quad \text{ha } k > 1$$

és várható értéke negatív:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k p_k =: \mu < 0.$$

Értelmezzük az X_n Markov láncot az $S = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ állapottéren, melynek átmenetmátrixa:

$$P_{i,j} = \begin{cases} p_{j-i} & \text{ha } j > 0, \\ \sum_{k\leq 0} p_{k-i} & \text{ha } j = 0. \end{cases}$$

Más szóval: X_n bolyongás, melynek lépés eloszlása $\big(p_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$, de nem léphet a negatív félegyenesre. Feladatunk célja bebizonyítani, hogy az X_n bolyongás pozitív rekurrens.

(a) Tegyük fel, hogy $\pi(j)$, $j \in S$, egy invariáns eloszlás. Bizonyítsuk be, hogy minden $i > 0$-ra

$$\pi(i) = \sum_{j=i-1}^{\infty} \pi(j) p_{i-j}.$$

(b) Legyen $q_k = p_{1-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Bizonyítsuk be, hogy az

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} s^k q_k.$$

egyenletnek létezik egy és csakis egy $s^* \in (0,1)$ megoldása.

Útmutatás: $\big(q_k\big)_{k=0}^{\infty}$ olyan valószínűségi eloszlás $\mathbb{N}$-en, melynek várható értéke 1-nél nagyobb. A fenti egyenlet jobb oldalán ennek az eloszlásnak a generátorfüggvénye szerepel.

(c) A (b) pont beli s^* érték felhasználásával határozzuk meg az X_n Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.

3.16 Egy Markov lánc állapotai a nem-negatív egész számok: $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Átmenet valószínűség mátrixa:

$$P_{k,l} = e^{-\lambda} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} p^{\nu} q^{k-\nu} \frac{\lambda^{l-\nu}}{(l-\nu)!}.$$

($p, q > 0$, $p + q = 1$.) Bizonyítandó, hogy

$$P_{k,l}^{(n)} \to e^{-\lambda/q} \frac{(\lambda/q)^l}{l!},$$

amint $n \to \infty$.