Sztochasztikus folyamatok
3 és feledik feladatsor
Markov lánc NSZT, CHT

3b.1 Legyen P irreducibilis átmenetmátrix az S véges állapottér felett és legyen $\pi = \pi P$ a hozzá tartozó stacionárius eloszlás. Ha $f, g : S \to \mathbb{R}$, akkor definiáljuk a stacionárius mértékre vonatkozó belső szorzatukat a következő módon:

$$\langle f, g \rangle_\pi := \sum_{x \in S} f(x) g(x) \pi(x)$$

Ekkor $\sqrt{\langle f, f \rangle_\pi} = \|f\|_2$ az (S, π) mértéktér szerinti L_2-normája f-nek.

(a) Lássa be, hogy $\mathbf{D}^2_\pi(f) = \langle f, f \rangle_\pi - \langle \mathbb{1}, f \rangle^2_\pi$.

(b) Mi a P mátrix $\langle\ ,\ \rangle_\pi$-ra vonatkozó adjungáltjának valószínűségszámítási jelentése? Milyen Markov-láncoknak lesz önadjungált a P-je?

(c) Mi a valószínűségszámítási jelentése a $\langle \mathbb{1}, f \rangle_\pi = \langle \mathbb{1}, Pf \rangle_\pi$ azonosságnak?

(d) Legyen X_1, X_2 a stacionárius állapotból indított Markov lánc első két lépése. Lássa be, hogy ha $f : S \to \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{1}{2}\mathbf{D}^2\big(f(X_2) - f(X_1)\big) = \langle f, (I - P) f \rangle_\pi$$

3b.2 Lássa be, hogy reverzibilis Markov láncok spektrális rését a következő szélsőérték-probléma megoldásával is megkaphatjuk:

$$r = \min_f \left\{ \frac{\frac{1}{2}\mathbf{D}^2\big(f(X_2) - f(X_1)\big)}{\mathbf{D}^2(f(X_1))} \right\}$$

ahol f a nemkonstans függvényeken fut végig.

Segítség: $\mathbf{E}_\pi(f) = 0$ és $\mathbf{D}^2_\pi(f) = 1$ feltehető, Lagrange-féle multiplikátor-módszer.

3b.3 (a) Legyen X nemnegatív egész értékű valószínűségi változó, melynek véges a második momentuma, azaz $\mathbf{E}(X^2) < \infty$. Fejezzük ki az $S := \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbf{P}(X \geq k)$ mennyiséget $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{D}^2(X)$ segítségével.

(b) A 2.8-as feladat jelöléseivel adjon felső becslést $\mathbf{E}(T^2)$-re!

3b.4 *Nagy számok törvénye Markov láncokra*

Legyen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ véges állapotterű, irreducibilis, aperiodikus Markov lánc, jelölje P az átmenetmátrixát, μ_0 a kezdeti eloszlását és π a stacionárius eloszlását. Legyen $i \in S$ az állapottér tetszőleges eleme. Jelölje T_0 az i első elérésének időpontját, T_k pedig a k-adik visszatérés időpontját i-be. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Legyen $Y_0 = \sum_{n=0}^{T_0-1} f(X_n)$ és $k \geq 1$-re $Y_k = \sum_{n=T_{k-1}}^{T_k-1} f(X_n)$.

(a) Lássa be, hogy $\mathbf{E}(Y_1) = \mathbf{E}(T_1 - T_0) \cdot \langle \mathbb{1}, f \rangle_\pi$.

(b) Jelölje $\nu(N)$ a bolyongó i-ben tett látogatásainak számát az N időpont előtt. Lássa be a Kolmogorov-féle NSZT és a felújításelmélet alaptrükkje segítségével, hogy $\frac{\nu(N)}{N}$ majdnem biztosan $\pi(i)$-hez konvergál.

(c) Bizonyítsa be, hogy majdnem biztosan

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{N} = \langle \mathbb{1}, f \rangle_\pi$$

(d) Általánosítsa az állítást periodikus, irreducibilis Markov-láncokra.

3b.5 *Centrális határeloszlás-tétel Markov láncokra*

Az előző feladat feltevéseivel és jelöléseivel dolgozunk tovább. Tegyük fel továbbá, hogy a Markov lánc aperiodikus, és hogy $\langle \mathbb{1}, f \rangle_\pi = 0$. Bizonyítsa be, hogy $\frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{\sqrt{N}}$ eloszlásban konvergál egy $N(0, \sigma^2)$ normális eloszlású valószínűségi változóhoz.

Segítség: a becsléseknél jól jön, hogy f-nek a szupremum-normája véges és hogy a visszatérési idő szórásnégyzete véges.

3b.6 *A Green-Kubo formula*

Az előző feladat jelöléseit és feltevéseit használjuk. Tegyük fel továbbá az egyszerűség kedvéért, hogy $\mu_0 = \pi$.

(a) Fejezze ki $\mathbf{Cov}(f(X_n), f(X_m))$ értékét $\langle\ ,\ \rangle_\pi$ és P segítségével.

(b) Lássa be, hogy az $I - P$ operátor megszorítása az $\mathbf{E}_\pi(f) = 0$ függvényekből álló P-invariáns altérre invertálható.

(c) Lássa be, hogy $\langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi = 0$ esetén

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty} \mathbf{D}^2\left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{\sqrt{N}}\right) = 2\langle f, (I-P)^{-1} f\rangle_\pi - \langle f, f\rangle_\pi$$

(d) Mit ad a formula, ha $P_{x,y} = \pi(y)$? Mi ennek a valószínűségszámítási jelentése?

(e) Tegyük fel, hogy a Markov lánc reverzibilis. Lássa be lineáris algebrai eszközökkel is, hogy $\sigma^2 \geq 0$.

(f) Tegyük fel, hogy a Markov lánc reverzibilis. Adjon felső becslést σ^2 értékére a spektrális rés segítségével. Éles ez a felső becslés?

3b.7 Tekintsünk egy aszimmetrikus bolyongást egy fán, azaz: G egy irányítatlan, összefüggő, körmentes gráf, a Markov lánc állapottere $S = V(G)$, és $P_{x,y} > 0$ akkor és csak akkor, ha $\{x, y\} \in E(G)$ vagy $x = y$.

(a) A Markov-lánc NSZT és a 2.2 feladat segítségével adjon magyarázatot arra, hogy miért reverzibilis ez a Markov lánc.

(b) Adja meg a stacionárius eloszlását.

3b.8 Legyen $N(t)$ annak a száma, ahányszor Kovácsék kidobták az újságos kupacukat az első t nap alatt. Mi az az m és σ, amire $\frac{N(t)-mt}{\sigma\sqrt{t}}$ eloszlása $N(0,1)$-hez konvergál? A választ számolja ki kétféleképpen is: a felújítási folyamatokra vonatkozó CHT, valamint Markov lánc CHT és a Green-Kubo formula segítségével. Mindkét számoláshoz használhat szoftvert.

3b.9 *A közegellenállásról*

Tekintsük a következő bolyongást periodikus közegben: a bolyongás állapottere $\mathbb{Z}$, az egész számok halmaza. Csak első szomszédba tud lépni a bolyongó (vagy helyben marad).

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_{n+1} = x-1 \mid X_n = x) &= p(x) \\
\mathbf{P}(X_{n+1} = x+1 \mid X_n = x) &= q(x) \\
\mathbf{P}(X_{n+1} = x \mid X_n = x) &= r(x)
\end{aligned}$$

Ahol $p(x) + q(x) + r(x) = 1$, továbbá a közeg periódusa M, azaz $p(x+M) = p(x)$, $q(x+M) = q(x)$, $r(x+M) = r(x)$. A bolyongó $X_0 = 0$-ból indul.

(a) Jelölje $\mathbf{P}_{x,\infty}$ annak a valószínűségét, hogy a bolyongó valaha eléri a $-x$ pontot. Számítsa ki $\psi := \lim_{x\to\infty} (\mathbf{P}_{x,\infty})^{\frac{1}{n}}$ értékét.

$\log(\psi)$-t nevezzük a közeg aszimptotikus (jobbra való) lejtésének.

(b) Legyen $Y_n := X_n \bmod M$ aszimmetrikus bolyongás a maradékosztályokon. Lássa be a Markov lánc NSZT segítségével, hogy van olyan $w \in \mathbb{R}$, hogy minden x maradékosztályra

$$\pi(x-1) \cdot q(x-1) = \pi(x) \cdot p(x) + w$$

ahol π az Y_n Markov lánc stacionárius eloszlása (tehát Y_n "majdnem" reverzibilis).

(c) Legyen X_0 kezdeti eloszlása olyan, hogy Y_0 stacionárius eloszlású legyen. Fejezze ki $\mathbf{E}(X_{n+1} - X_n)$ értékét w segítségével.

(d) Számolja ki w értékét.

(e) Számolja ki a bolyongó aszimptoikus sebességét, azaz $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n}$ értékét.

(f) Lássa be, hogy $\psi < 1$ akkor és csak akkor, ha $w > 0$.

(g) Lássa be, hogy az ugyanolyan aszimptotikus lejtésű közegek közül a homogén közegben mozgó részecske aszimptotikus sebessége a legnagyobb.