Sztochasztikus folyamatok
4. feladatsor
Bolyongások $\mathbb{Z}$-n: differencia egyenletek, tükrözési elv

4.1 Legyen X_t, $t = 0, 1, 2 \ldots$ egyszerű szimmetrikus bolyongás az egydimenziós $\mathbb{Z}$ egész rácson. Legyen $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$, az $a \in \mathbb{Z}$ rácspont első elérésének ideje. Legyen $a < b$ két rögzített rácspont. Számoljuk ki az

$$f_{[a,b]} : [a, b] \cap \mathbb{Z} \to [0, 1], \qquad f_{[a,b]}(x) := \mathbf{P}(\tau_a < \tau_b | X_0 = x)$$

$$g_{[a,b]} : [a, b] \cap \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \qquad g_{[a,b]}(x) := \mathbf{E}(\min(\tau_a, \tau_b) | X_0 = x)$$

függvényeket.

4.2 Határozzuk meg azt az $f : \{0, 1, 2, \ldots, 10\} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az

$$f(n) = \frac{1}{4} f(n-1) + \frac{3}{4} f(n+1), \qquad n = 1, 2, \ldots, 9,$$

differencia egyenletet és a az $f(0) = 0$, $f(10) = 1$ peremfeltételeket. Adjunk valószínűségszámítási értelmezést az f függvénynek.

4.3 (a) Legyenek $a > 0$ rögzített egész szám. Oldjuk meg a következő peremérték problémát: $\lambda \in (0, 1)$ rögzített paraméter és $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ kielégíti a következő feltételeket:

$$\frac{1}{2} f(x+1) + \frac{1}{2} f(x-1) = \lambda^{-1} f(x), \qquad \text{ha } -a < x < a,$$

$$f(-a) = 1 = f(a).$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmezést az $f_{[a,b]}$ függvénynek.
(b) Oldjuk meg ugyanezt a feladatot az $[a, b]$ intervallumban, ahol $a < b$ egész számok.

4.4 Határozzuk meg azt az $f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ függvényt, amely kielégíti az

$$f(n) = \frac{1}{3}f(n-1) + \frac{1}{3}f(n+1) + \frac{1}{3}f(n+2), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

differencia egyenletet és az

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = 1$$

peremfltételeket. Adjunk valószínűségszámítási értelmezést az f függvénynek.

4.5 Határozzuk meg azokat az $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyek kielégítik az

$$f(n) = \frac{1}{2}f(n+1) + \frac{1}{2}f(n-1) - 1$$

differenciaegyenletet.

Útmutatás: Előbb mutassuk meg, hogy $f(n) = n^2$ megoldása a fenti egyenletnek, majd feltéve, hogy f_1 és f_2 megoldás, írjunk fel differencia egyenletet $g = f_2 - f_1$-re.

4.6 A Fibonacci számokat a következő módon értelmezük: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ és $n > 2$-re $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. A differencia egyenlet megoldásával találjunk formulát F_n-re.

4.7 A fagylaltosnál egy gombóc fagyi ára 10 peták. $(m + n)$ ember áll sorba fagyiért, véletlen sorrendben. Ezek közöl m-nek van 10 petákos érméje, n-nek viszont csak 20 petákos érméje van $(m \geq n)$, mindannyian egy gombóc fagyit akarnak venni. Feltesszük, hogy kezdetben üres a fagylaltos kasszája. Mennyi annak a valószínűsége, hogy senkinek sem kell várakoznia a visszajáró pénzére.

Az alábbi feladatokban tekintsük az egy dimenziós, origóból kiinduló egyszerű bolyongási trajektóriákat. a, b, c és n pozitív egész számokat jelölnek. Az $\binom{x}{y}$ kifejezésre a megszokott konvenciók érvényesek

4.8 (a) Bizonyítandó, hogy azon n-lépéses trajektóriák száma, amelyek nem érik el a $-b$ szintet és az a szinten végződnek, egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\binom{n}{\frac{n+a}{2}} - \binom{n}{\frac{n+a+2b}{2}}.$$

(b) Tegyük fel, hogy $b > a$. Bizonyítandó, hogy azon n-lépéses trajektóriák száma, amelyek nemérik el a b szintet és az a szinten végződnek, egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\binom{n}{\frac{n+a}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2b-a}{2}}.$$

4.9 Tegyük fel, hogy $a < c$ Bizonyítandó, hogy azon n-lépéses trajektóriák száma, amelyek előbb elérik a c szintet, majd az n-edik lépéskor az a szinten végződnek, úgy, hogy a c szint első elérése után a $-b$ szintet már nem érik el, egyenlő a következő kifejezéssel:

$$\binom{n}{\frac{n+a-2c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+a+2b+2c}{2}}.$$

4.10 Legyen X_n egyszerű szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n, mely az origóból indul, $X_0 = 0$. Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{P}\Big(X_{2n} = 0, \max_{0<j<2n} X_j \geq k\Big) = \mathbf{P}\Big(X_{2n} = 2k\Big).$$