Sztochasztikus folyamatok
5. feladatsor
A Poisson folyamat és alkalmazásai
(forgalmi, sorbanállási problémák, stb.)

5.1 (a) Van egy felújítási folyamat, $EXP(\lambda)$ eloszlású felújítási időkkel. Lássuk be, hogy amellet a feltétel mellett, hogy a $[0, t]$ intervallumban pontosan n darab felújítás történt, az n darab felújítási időpont együttes eloszlása (tehát az együttes sűrűségfüggvényük) olyan, mint ha n darab független egyenletes eloszlású pontot vettünk volna a $[0, t]$ intervallumon és nagyság szerint sorba rendeztük volna őket.

(b) Vegyünk a $[0, T]$ intervallumon $\lambda \cdot T$ darab független, egyenletes eloszlású pontot, rendezzük őket sorba és nézzük az első n darabot közülük. n fix, de ugyanezt a kísérletet megismételjük egyre nagyobb és nagyobb T-kkel, $T \to \infty$. Lássuk be, hogy az első n pont együttes eloszlása (tehát az együttes sűrűségfüggvényük) kovergál egy $EXP(\lambda)$ paraméterű felújítási folyamat első n pontjának együttes eloszlásához.

5.2 Hogy ott mindig világosság légyen, ablaktalan folyosónk lámpájába azonnal becsavarjuk az új égőt, ha az előző kiég. Az izzók élettartamai egymástól függetlenek, és külön-külön exponenciális eloszlást követnek λ paraméterrel. $t = 0$-kor csavarjuk be az első égőt. Tekintsük annak az izzónak a teljes élettartamát, amelyik a t időpillanatban ég ($t > 0$ fix). Mennyi ennek a teljes élettartamnak a várható értéke,

(a) Ha tudjuk, hogy a 0 időponttól számítva ez az izzó a k -adik.

(b) Ha nem tudjuk, hogy hányadik. $t \to \infty$ esetén mihez konvergál a t-edik időpontban égő villanykörte teljes élettartamának várható értéke?

5.3 Tekintsünk egy homogén, λ paraméterű Poisson folyamatot, és legyen $X(a,b)$ az (a,b) intervallumban lévő pontok száma. Határozza meg $\mathbf{Cov}(X(a,b), X(c,d))$ értékét!

5.4 Tekintsünk egy homogén, λ paraméterű Poisson folyamatot, és legyen $X(a,b)$ az (a,b) intervallumban lévő pontok száma. Legyen az (a,b) intervallum a (c,d) intervallum belsejében.

(a) Határozza meg az $\mathbf{E}(X(c,d)|X(a,b))$ feltételes várható értéket!

(b) Határozza meg az $\mathbf{E}(X(a,b)|X(c,d))$ feltételes várható értéket!

5.5 Legyen adva egy λ paraméterű Poisson folyamat. Feltéve, hogy a $[0,t)$ intervallumba esik pont, számítsuk ki az első pont koordinátájának sűrűségfüggvényét.

5.6 Tekintsünk a számegyenesen egy λ paraméterű homogén Poisson folyamatot, jelöljük $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots$-vel a folyamat pontjainak koordinátáit (az egymásutáni események bekövetkezésének időpontjait). Képezzünk ebből egy újabb pontfolyamatot a következő módon: az eredeti Poisson folyamatban az egymás utáni események történési időpontjai közötti intervallumok felezőpontjaiba leteszünk egy-egy pontot, majd töröljük az eredeti Poisson folyamat pontjait. Azaz: az új follyamat pontjainak koordinátái: $S_i = (T_{i-1} + T_i)/2$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

(a) Poisson folyamat lesz-e az így képezett pontfolyamat?

(b) Mi lesz az újonnan képezett folyamat egymásutáni pontjai közötti időtartam hosszának sűrűségfüggvénye, várható értéke és szórása?

(c) Határozzuk meg két egymásutáni ilyen intervallum-hossz kovarianciáját és korrelációhányadosát.

(d) Bizonyítsuk be, hogy két nem egymásutáni intervallum hossza független egymástól.

5.7 Legyenek $0 = T_1 < T_2 < T_3 < \ldots$ λ paraméterű Poisson folyamat egymásutáni eseményeinek időpontjai. Legyen továbbá adott egy $\varrho : [0, \infty) \to (0,1)$ függvény. A Poisson folyamatot $t = 0$-kor elkezdjük megfigyelni és megfigyelését a T_i (véletlen) időpontban folytatjuk $\varrho(T_i)$ valószínűséggel, abbahagyjuk $1 - \varrho(T_i)$ valószínűséggel ($i = 0, 1, 2, \ldots$). Határozzuk meg a folyamat megfigyelési idejének eloszlásfüggvényét.

5.8 Tekintsünk n független $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ paraméterű Poisson folyamatot. Képezzünk ezekből egy újabb pontfolyamatot, melynek pontjai az előbbi független Poisson folyamatok pontjainak uniója. Igazoljuk, hogy az így definiált pontfolyamat szintén Poisson, melynek paramétere $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

A következő feladatokban egy útkereszteződés járműforgalmának egy lehetséges matematikai modelljéről lesz szó. A főútvonalon egymást követő járművek elhaladásának időpontjait Poisson folyamattal modellezzük. A főútvonalon mozgó járműveknek a kereszteződésen való áthaladása ebben az egyszerűsített modellben nem vesz időt igénybe. A mellékútvonalon érkező és a főútvonalat keresztezni akaró jármű áthaladása pozitív időt vesz igénybe, ezért neki addig kell várakoznia, míg a főútvonalon érkező járművek között megfelelő hosszú szabad intervallum nincsen. A főútvonal belátható.

5.9 A főútvonalon egyirányú a forgalom és a járművek elhaladása λ paraméterű Poisson folyamat. A keresztező mellékútvonalon az áthaladás a időt vesz igénybe. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autós k járműnek kell elsőbbséget adjon, mielőtt áthaladhat a kereszteződésen?

5.10 A fenti paraméterek függvényében határozzuk meg azon autók számának várható értékét és szórását, melyeket a mellékútvonalon várakozó autósnak el kell engednie, mielőtt áthaladhat.

5.11 Legyen számszerűen 10 másodperc az mellékútvonalon áthaladás ideje és 5 másodperc a főútvonalon egymásután érkező autók közötti idő várható értéke.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mellékútvonalon érkező autósnak *legfeljebb* 2 főútvonalon érkezőnek kell elsőbbséget adnia?

(b) Mennyi a megvárandó autók számának várható értéke és szórása?

5.12 Tegyük fel, hogy a főútvonalon kétirányú forgalom van: mindkét irányból λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a járművek. A mellékútvonalon érkező autósnak $2a$ időre van szüksége az áthaladáshoz. Válaszoljuk meg ilyen körülmények között az előbbi feladatokban feltett kérdéseket.

5.13 A főútvonalon kétirányú a forgalom: mindkét irányból λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a járművek. A mellékútvonalon áthaladó járműnek mindkét sávon való áthaladásra (egyenként) a időre van szüksége. Ám most a két sáv között elég széles járdasziget van, ahhoz, hogy a mellékútvonalon közlekedő áthaladó jármű a két sáv között megállhasson: először csak a balról érkező járműveknek kell elsőbbséget adnia, míg megfelelő rést nem kap, majd a jobbról érkezőknek ad elsőbbséget. Határozzuk meg a teljes várakozási idő várható értékét és szórását. Hasonlítsuk össze az eredményt az előző feladatéval.

5.14 Írjuk fel a várakozási idő sűrűségfüggvényét az 5.9 feladat feltételei mellett.

5.15 Tekintsünk egy λ paraméterű Poisson folyamatot. Legyenek $t > 0$ és $a > 0$ rögzített számok. Jelöljük $P(\lambda, a, t)$-vel annak a valószínűségét, hogy a $(0, t)$ intervallumban van olyan a hosszúságú részintervallum, amelybe nem esik a Poisson folyamatnak pontja. Határozzuk meg a $P(\lambda, a, t)$ függvényt.

5.16 Tekintsünk egy λ paraméterű Poisson folyamatot. Legyenek $\mu > 0$ és $a > 0$ rögzített számok, és ξ egy μ paraméterű (μ^{-1} várható értékű) exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amely független a Poisson folyamattól. Jelöljük $W(\lambda, a, \mu)$-vel annak a valószínűségét, hogy a $(0, \xi)$ (véletlen hosszúságú) intervallumban van olyan a hosszúságú részintervallum, amelybe nem esik a Poisson folyamatnak pontja. Határozzuk meg a $W(\lambda, a, t)$ függvényt.

5.17 Legyenek $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ független, azonos λ paraméterű *csonka exponenciális eloszlású* valószínűségi változók: $\mathbf{P}(\xi_j < x) = (1 - e^{-\lambda x})/(1 - e^{-\lambda a})$, ha $x \in [0, a]$; $\mathbf{P}(\xi_j < x) = 0$, ha $x \in (-\infty, 0)$; $\mathbf{P}(\xi_j < x) = 1$, ha $x \in (a, \infty)$. Határozzuk meg $\eta_n := \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ eloszlását.

A következő két feladatban sorbanállási, várakozási problémákat modellezünk Poisson folyamat segítségével.

5.18 Egy üzlet pénztáránál sorban állnak a vásárlók. A vásárlók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot. Az egyes vásárlók kiszolgálása független, azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású ideig tart.

Egy vásárló kiszolgálásának ideje alatt mennyi a sorhossz növekedésének várható értéke? Ha az egymásutáni vásárlók érkezése közötti idő várható értéke fél perc és az egyes vásárlók kiszolgálási idejének várható értéke három perc, hány pénztárat kell működtetni, ahhoz, hogy ne legyen nagy a morgás?

5.19 Egy parkolóhelyen N autó számára van férőhely. Tegyük fel, hogy az egyes autók parkolási ideje egymástól független μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A parkolni szándékozó autók érkezési ideje λ paraméterű Poisson folyamatot alkot, mely független a parkolási időktől. Jelölje P_n a következő valószínűséget a *stacionárius állapotban*:

(1) ha $0 \leq n \leq N$, $P_n = \mathbf{P}$(a parkolóhelyen n autó parkol),

(2) ha $n > N$, $P_n = \mathbf{P}$(a parkolóhely tele van és további $n - N$ autó várakozik a bejutásra).

Határozzuk meg a P_n, $n \geq 0$ valószínűségeket a következő három esetben:

(a) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, addig várakozik, amíg hely nem ürül.

(b) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, azonnal távozik.

(c) Ha egy autós olyankor érkezik a parkolóhelyhez, amikor az tele van, maximum egy véletlen — ν paraméterű exponenciális eloszlású — ideig várakozik. Ha addig nem jut be a parkolóhelyre, távozik.

A következő három feladat síkbeli és térbeli Poisson pontfolyamatra vonatkozik. A $\mathbb{R}^n$-beli λ paraméterű (vagy sűrűségű, vagy intenzitású) homogén Poisson pontfolyamat egy olyan véletlen ponteloszlás $\mathbb{R}^n$-ben amleyet a következő tulajdonság jellemez:
Ha adottak $k \in \mathbb{N}$ és $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}^n$ diszjunkt, Borel-mérhető és véges Lebesgue mértékű részhalmazai $\mathbb{R}^n$-nek, akkor az ezekbe a halmazokba eső pontok számai független Poisson eloszlású valószínűségi változók melyeknek paraméterei (várhatóértékei) rendre $\lambda|A_1|, \lambda|A_2|, \ldots, \lambda|A_k|$.
Gondoljunk a csillagok elhelyezkedésére az égen, az ibolyák elhelyezkedésére egy hatalmas réten, stb.

5.20 Tekintsünk az $\mathbb{R}^2$ síkon egy λ sűrűségű, homogén Poisson pontfolyamatot. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges, de rögzített pontját (az origót) és határozzuk meg a hozzá legközelebb eső véletlen pont távolságának sűrűségfüggvényét.

5.21 A fenti feladat körülményei között jelöljük $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$-al a véletlen pontok távolságait az origótól, növekvő sorrendben. Határozzuk meg ρ_n sűrűségfüggvényét, várható éretékét és szórását.

5.22 Miért nem világos az éjszakai égbolt? Alkossunk matematikai modellt a világegyetemben lévő csillagok helyzetére és az éjszakai égbolt látványára. (Különös tekintettel a Tejútra ...)