Sztochasztikus folyamatok
5b. feladatsor
A feltételes várhatóérték

5b.1 Két kockával dobunk. Legyen X az egyik kocka eredménye, Z pedig a kettő összege. Számolják ki $\mathbf{E}(X \mid Z)$-t.

5b.2 Lássa be, hogy az X valószínűségi változó által generált $\sigma(X)$ szigma-algebra szerint mérhető Y valószínűségi változók felírahatóak $Y = \varphi(X)$ alakban, ahol $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-mérhető-függvény.

5b.3 Legyenek X és Y valószínűségi változók ugyanazon a valószínűségi mezőn értelmezve, és jelölje $\mathcal{F}$ az X által generált σ-algebrát. Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(|X|) < +\infty$. Bizonyítandó, hogy X es Y akkor és csak akkor függetlenek, ha tetszőleges $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvényre

$$\mathbf{E}(\varphi(Y)|\mathcal{F}) = \mathbf{E}(\varphi(Y))$$

5b.4 Legyen X és Y együttesen abszolút folytonos eloszlású, legyen az együttes sűrűségfüggvényük $f(x, y)$. Lássa be, hogy

$$\mathbf{E}(Y|X) = \mathbf{E}(Y|\sigma(X)) = \frac{\int y f(X, y) dy}{\int f(X, y) dy}$$

5b.5 Legyen Y mérhető a $\mathcal{G}$ szigma-algebra szerint. Bizonyítandó, hogy

$$\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \geq Y \iff \forall A \in \mathcal{G} \quad \mathbf{E}(\mathbb{1}_A X) \geq \mathbf{E}(\mathbb{1}_A Y)$$

5b.6 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek és azonos eloszlásúak. Legyen $m \leq n$ esetén $S_m = \sum_{k=1}^{m} X_k$. Határozza meg $\mathbf{E}(S_m|S_n)$ értékét!

5b.7 Legyen $\mathbf{D}^2(X|\mathcal{G}) := \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X|\mathcal{G}))^2|\mathcal{G}\big)$. Lássa be, hogy $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(\mathbf{D}^2(X|\mathcal{G})) + \mathbf{D}^2(\mathbf{E}(X|\mathcal{G}))$.

5b.8 Legyen X es Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = \frac{\exp(-x/y)\exp(-y)}{y} \mathbb{1}[0 < x, 0 < y]$$

Számítsa ki $\mathbf{D}^2(X)$ értékét!

5b.9 Egy metró elindulási időpontja egyenletes a $[0,t]$ intervallumon. Az utasok egy λ paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek. Számítsa ki a metróra felszálló utasok számának szórásnégyzetét!

5b.10 Legyenek $X_1, X_2, \dots$ függetlenek és azonos eloszlásúak és ν tőlük független $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó. Legyen $Y = \sum_{k=1}^{\nu} X_k$. Fejezze ki $\mathbf{D}^2(Y)$ értékét $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(\nu)$, $\mathbf{D}^2(X_1)$, $\mathbf{D}^2(\nu)$ segítségével!

5b.11 A ketyeregyár n darab ketyerét gyártott, mindegyik ψ valószínűséggel hibás. A minőségellenőrzés minden hibás ketyeréről δ valószínűséggel állapítja meg, hogy hibás. Jelölje X a hibás ketyerék számát, Y pedig a minőségellenőrzés által hibásnak nyilvánítottak számát. Mutassa meg, hogy

$$\mathbf{E}(X|Y) = \frac{n\psi(1-\delta) + (1-\psi)Y}{1-\delta\psi}$$

5b.12 Legyen $X_1, X_2, \dots$ homogén Markov lánc a véges S állapottéren, aminek az átmenetmátrixa P. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$.

$$\mathbf{E}\big(f(X_n)|\sigma(X_1, \dots, X_{n-1})\big) = ?$$