Sztochasztikus folyamatok
6. feladatsor
Folytonos idejű Markov láncok

6.1 Az A és B üzletbe a vásárlók X_t, illetve Y_t független Poisson folyamatok szerint érkeznek, melyeknek paramétere λ, illetve μ. (Az időt órákban mérjük.) Mindkét üzlet reggel nyolckor nyit.
(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy reggel előbb érkezik vásárló az A üzletbe, mint a B-be?
(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a nyitás utáni első két órában a két üzletbe együttesen pontosan négy vásárló érkezik?
(c) Feltéve, hogy a két üzletbe együttesen a nyitás utáni első két órában összesen négy vásárló érkezett, mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek mindegyike az A üzletbe ment?
(d) Jelöljük T-vel a B üzletbe belépő első vásárló érkezésének (véletlen) idejét. Ekkor X_T azon vásárlók száma, akik az A üzletben jártak *mielőtt* az első vásárló a B üzletbe betette volna a lábát. Írjuk fel az X_T valószínűségi változó eloszlását.

6.2 Az A és B telefonokhoz a hívások X_t, illetve Y_t független Poisson folyamatok szerint érkeznek, melyeknek paraméterei λ, illetve μ. Legyen $Z_t := X_t + Y_t$ a két telefonhoz *együttesen* érkező hívások folyamata.
(a) Mutassuk meg, hogy Z_t is Poisson folyamat. Mennyi a Z_t folyamat paramétere?
(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első hívás az A telefonhoz érkezik?
(c) Jelölje T azt a (véletlen) időt, amikor az első hívás érkezik a későbben megszólaló telefonhoz. Tehát: T az a legkorábbi időpont, amikor már hívás érkezett mindkét telefonhoz. Írjuk fel a T valószínűségi változó sűrűségfüggvényét és eloszlásfüggvényét.

6.3 Legyen G egy véges állapotterű, irreducibilis, folytonos idejű Markov lánc infinitezimális generátora. Ekkor a G mátrix átlós elemei negatívak, nem-átlós elemei nem-negatívak és sorösszegei nullák.
(a) Legyen a olyan pozitív szám, amely (szigorúan) nagyobb a G mátrix minden átlós elemének abszolút értékénél. Legyen $P := a^{-1}G + I$. Mutassuk meg, hogy P ugyanazon véges állapottér feletti irreducibilis és aperiodikus diszkrét idejű Markov lánc átmenet valószínűségeinek mátrixa.
(b) A (a)-beli eredmény felhasználásával bizonyítsuk be, hogy a G mátrixnak 0 egyszeres sajátértéke, melyhez tartozó baloldali sajátvektor (sorvektor) valószínűségi eloszlás az állapottéren és G minden további sajátértékének negatív a valós része.

6.4 Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc a $\{1, 2\}$ állapottéren, melynek ugrási rátái: $\lambda(1 \to 2) = 1$, illetve $\lambda(2 \to 1) = 4$. Írjuk fel az átmenet valószínűségek P^t félcsoportját.

6.5 Legyen X_t irreducibilis folytonos idejű Markov lánc egy véges vagy megszámlálható S állapottéren. Bizonyítsuk be, hogy bármely $\alpha, \beta \in S$ és $t > 0$ esetén $\mathbf{P}(X_t = \beta | X_0 = \alpha) > 0$.

6.6 Legyen X_t folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1, 2, 3, 4\}$ állapottéren, melynek infinitezimális generátora

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Írjuk fel az X_t Markov lánc stacionárius (invariáns) eloszlását.

(b) Tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?

(c) Újból tegyük fel, hogy a Markov lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

6.7 Egy üzemben 3 gép és 2 szerelő van. A gépek hibátlan üzemelésének ideje λ paraméterű exponenciális eloszlású. Ha egy gép elromlik, és van legalább egy szabad szerelő, akkor egy szerelő azonnal elkezdi javítani a gépet. Ha nincs szabad szerelő, akkor várni kell addig, ameddig valamelyik szerelő felszabadul. A szerelés ideje exponenciális eloszlású 2λ paraméterrel. A működési és szerelési idők függetlenek egymástól. Legyen $X(t)$ a t -kor működő gépek száma $(t > 0)$.

(a) Adja meg ennek a folyamatnak az infinitezimális generátorát!

(b) Nagy idő eltelte után kb. mennyi a valószínűsége annak, hogy egy adott pillanatban pontosan k gép üzemel $(k = 0, 1, 2, 3)$?

6.8 Egy pénzváltó irodához 3 -paraméterű homogén Poisson folyamat szerint érkeznek az ügyfelek. Az irodában egyetlen kiszolgáló dolgozik, és egy-egy ügyfél kiszolgálásának az időtartama 5 - paraméterű exponenciális eloszlást követ. Az iroda olyan kicsi, hogy egyidejűleg csak 2 ügyfél lehet az irodában. Ha az iroda tele van, akkor az újabb ügyfelek a konkurens céghez mennek. Az iroda nyitásától számítva sok idő eltelte után érek oda.

(a) Mi a (közelítő) valószínűsége annak, hogy az irodában van hely a számomra?

(b) Tegyük fel, hogy bejutok az irodába. Emellett a feltétel mellett az irodában eltöltött időmnek mennyi a várható értéke, és

(c) mi az időtartam eloszlásának a sűrűségfüggvénye?

6.9 Egy boltba λ -paraméterű homogén Poisson folyamat szerint érkeznek a vásárlók. A boltban egyetlen eladó dolgozik. Egy-egy ügyfél kiszolgálásának az időtartama μ-paraméterű exponenciális eloszlást követ, $\mu > \lambda$. Sok idő eltelte után betoppanok én és beállok a sorba. Mi az eloszlása annak az időtartamnak, amit a boltban töltök?

6.10 *A Yule-folyamat*

Egy petricsészében $t = 0$-kor van egy amőba. Egy amőba $EXP(1)$ idő elteltével kettéosztódik, és lesz belőle két ugyanolyan amőba, mint az eredeti. Lássa be, hogy a t időpontban a petricsészében lévő amőbák száma $GEO(e^{-t})$ eloszlású (az a fajta geometriai, amikor nemcsak a kudarcokat számoljuk, hanem beleszámítjuk a sikeres próbálkozást is).

6.11 Legyen X_t folytonos idejű születési/halálozási folyamat, melynek születési rátái $\lambda_n = 1+(n+1)^{-1}$, halálozási rátái $\mu_n = 1$. Tranziens-, null rekurrens- vagy pozitív rekurrens-e ez a folyamat? És ha $\lambda_n = 1-(n+2)^{-1}$?

6.12 Az $X_t \in \mathbb{N}$ Markov folyamat egy populáció méretének időbeli fejlődését modellezi. A populáció minden egyes egyede a többiektől függetlenül λ rátával szül egy új egyedet és μ rátával elhal. Azaz: X_t születési/halálozási folyamat, melynek születési rátái $\lambda_n = n\lambda$, halálozási rátái $\mu_n = n\mu$.

(a) Mely λ és μ paraméter értékek mellett hal ki egy valószínűséggel a populáció?

(b) Legyen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Lássa be, hogy

$$\lim_{h\to 0_+} \frac{1}{h}\mathbf{E}\big(f(X_{t+h}) - f(X_t)|X_t\big) = \big(f(X_t+1) - f(X_t)\big)\cdot X_t \cdot \lambda + \big(f(X_t-1) - f(X_t)\big)\cdot X_t \cdot \mu$$

(c) Legyen $\mu = \lambda = 1$, legyen $X_0 = 1$. Lássa be, hogy ha $G(t,z) := \mathbf{E}(z^{X_t})$, akkor $G(t,z)$ megoldja az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$\partial_t G(t,z) = (z-1)^2 \partial_z G(t,z)$$

Segítség: alkalmazza az előző részfeladat gondolatmenetét az $f(x) = z^x$ függvényre.

(d) Oldja meg az egyenletet a $G(0,z) = z$ kezdeti feltétellel. Segítség: ha $\dot{z}(t) = -\left(z(t)-1\right)^2$, akkor $\frac{d}{dt}G(t,z(t)) = 0$. Ennek segítségével lássa be, hogy $X_0, X_1, X_2, \ldots$ az egy kritikus Galton-Watson-féle elágazó folyamat, melynek utódeloszlása $GEO(\frac{1}{2})$!

6.13 Módosítsuk az előbbi populáció modellt úgy, hogy a populáció egyedeinek születése és elhalása mellett ν rátával egy bevándorló érkezik kívülről. Így olyan születési/halálozási folyamatot kapunk, melynek születési rátái $\lambda_n = n\lambda + \nu$, halálozási rátái pedig változatlanul $\mu_n = n\mu$. Mely λ, μ, ν paraméter értékek mellett lesz a folyamat tranziens, null rekurrens, illetve pozitív rekurrens?

6.14 Tekintsünk egy születési/halálozási folyamatot, melynek születési rátái $\lambda_n = 1/(n+1)$, halálozási rátái pedig $\mu_n = 1$. Mutassuk meg, hogy a folyamat pozitív rekurrens és találjuk meg a stacionárius (invariáns) eloszlását.

6.15 Jelöljön X_t egy folytonos idejű, irreducibilis, stacionárius Markov láncot a véges S állapottéren. Jelölje G az infinitezimális generátorát, π a stacionárius eloszlását. Lássa be, hogy ha $f : S \to \mathbb{R}$, akkor

$$-\langle f, Gf\rangle_\pi = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0_+}\frac{1}{h}\mathbf{Var}\big(f(X_{t+h}) - f(X_t)\big)$$