Sztochasztikus folyamatok
7. feladatsor
Martingálok I.

7.1 Legyenek $X_1, \dots, X_n$ együttesen abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változók, legyen az együttes sűrűségfüggvényük $f(x_1, \dots, x_n)$ és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Milyen feltételeknek kell teljesülnie f-re hogy $X_1, \dots, X_n$ martingált alkosson?

7.2 Legyen $M_1, M_2, \dots$ martingál $\big(\mathcal{F}_n\big)_{n=1}^{\infty}$-re nézve. Legyen $\mathcal{G}_k = \sigma(M_1, M_2, \dots, M_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Mutassa meg, hogy M_n martingál $\big(\mathcal{G}_n\big)_{n=1}^{\infty}$-re nézve is.

7.3 Legyenek $X_1, \dots, X_n$ független valószínűségi változók és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Legyen φ olyan n változós függvény, hogy tetszőleges $x_1, \dots, x_n$-re és $1 \leq k \leq n$-re és $\hat{x}_k$-ra

$$|\varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)| \leq 1$$

Mutassa meg, hogy ha $M_k = \mathbf{E}\big(\varphi(X_1, \dots, X_n)|\mathcal{F}_k\big)$, akkor

$$\mathbf{P}\big(\,|M_k - M_{k-1}| \leq 1\big) = 1$$

7.4 Legyenek $X_1, X_2, X_3, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Legyen $m(\gamma) := \mathbf{E}(e^{\gamma X_i})$ e valószínűségi változók (közös) momentum generáló függvénye. Tegyük fel, hogy valamely rögzített $\gamma \in \mathbb{R}$-re $m(\gamma)$ véges. Legyen $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, ha $n > 0$. Értelmezzük az

$$M_n := m(\gamma)^{-1} \exp(\gamma S_n)$$

valószínűségi változókat. Bizonyítandó, hogy M_n *martingál* az $\mathcal{F}_n$ természetes filtrációra nézve.

7.5 Legyen $X_0, X_1, X_2, \dots$ Markov lánc az S véges állapottéren, jelöljük P-vel az átmenetmátrixát. Legyen $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a sztochasztikus folyamat által generált természetes filtráció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Mutassa meg, hogy az alább definiált M_n martingál erre a filtrációra nézve.

$$M_n = f(X_n) + \sum_{k=1}^{n-1} ((I - P)f)(X_k) - (Pf)(X_0)$$

7.6 (a) Lássa be, hogy ha $M_0, \dots, M_n$ martingál, akkor

$$\mathbf{Var}(M_n) = \mathbf{Var}(M_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Var}(M_k - M_{k-1})$$

(b) Legyen $X_0, X_1, X_2, \dots$ irreducibilis, aperiodikus, stacionárius Markov lánc az S véges állapottéren, jelöljük P-vel az átmenetmátrixát, π-vel a stacionárius eloszlását. Legyen $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ a sztochasztikus folyamat által generált természetes filtráció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$. Tegyük föl, hogy $\langle \mathbb{1}, f\rangle_\pi = 0$. Lássa be, hogy van olyan $g : S \to \mathbb{R}$, hogy $\langle \mathbb{1}, g\rangle_\pi = 0$ és $g - Pg = f$. A 5. feladat és az előző részfeladat segítségével lássa be a Green-Kubo-formulát, azaz a következő két egyenlőséget:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{Var}\Big(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} f(X_n)}{\sqrt{N}}\Big) = \langle g, g\rangle_\pi - \langle Pg, Pg\rangle_\pi = 2\langle f, (I-P)^{-1} f\rangle_\pi - \langle f, f\rangle_\pi$$

7.7 Legyen X_i, $i = 1, 2, \dots$ véges várhatóértékű valószínűségi változók sorozata adaptált az $\big(\mathcal{F}_n\big)_{n=1}^{\infty}$ filtrációra nézve, ahol $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Bizonyítandó, hogy a

$$M_0 := 0, \qquad M_n := \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mathbf{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}))$$

valószínűségi változó sorozat nulla várhatóértékű martingál.

7.8 *Diszkrét idejű Doob-Meyer-dekompozíció*

Egy $Y_1, Y_2, \dots$ sztochasztikus folyamatról azt mondjuk, hogy jósolható az $\big(\mathcal{F}_n\big)_{n=0}^{\infty}$ filtrációra nézve, ha Y_n mérhető $\mathcal{F}_{n-1}$-re nézve ($\mathcal{F}_0$ legyen a triviális szigma-algebra). Lássa be, hogy ha az $X_1, X_2, \dots$ az $\mathcal{F}_n$-hez adaptált sztochasztikus folyamatra teljesül $\mathbf{E}(|X_n|) < +\infty$, akkor X_n egyértelműen állítható elő egy jósolható Y_n folyamat és egy 0 várható értékű M_n martingál összegeként.

7.9 m (1-től m -ig számozott) golyót helyezünk el k (1-től k-ig számozott) urnában. Diszkrét időegységenként véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztunk egy golyót, kiemeljük a helyéről és áthelyezzük egy másik urnába, melyet véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választunk ki. Legyen X_n az első urnában lévő golyók száma az n-edik lépés után és $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$
(a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$-et.
(b) Értelmezzünk Z_n valószínűségi változókat, melyek martingált alkotnak $\mathcal{F}_n$-re nézve.

7.10 Legyen Z_n, $n = 0, 1, 2 \dots$ elágazó folyamat. Tegyük fel, hogy egy szülő gyermekei számának μ várható értéke és σ^2 szórásnégyzete véges. Jelöljük $\mathcal{F}_n$-nel a természetes filtrációt.
(a) Bizonyítandó, hogy

$$M_n := \frac{Z_n}{\mu^n}$$

martingál.
(b) Bizonyítsák be, hogy

$$\mathbf{E}(Z_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n) = \mu^2 Z_n^2 + \sigma^2 Z_n.$$

(c) A (b) pontbeli eredmény felhasználásával bizonyítsák be, hogy

$$N_n := M_n^2 - \frac{\sigma^2}{\mu^{n+1}} \frac{\mu^n - 1}{\mu - 1} M_n$$

szintén martingál.
(d) Az előző pont eredményének felhasználásával bizonyítsák be, hogy $\mu > 1$ esetén az M_n martingál egyenletesen korlátos L^2-ben (azaz $\sup_n \mathbf{E}(M_n^2) < \infty$), míg $\mu \le 1$ esetén $\mathbf{E}(M_n^2) \to \infty$.

7.11 Legyen $X_1, X_2, \ldots$ az $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ filtrációhoz adaptált valószínűségi változó sorozat és a_n, b_n valós számok sorozata. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = a_n X_n + b_n.$$

Találjunk A_n, B_n valós szám sorozatot úgy, hogy $Z_n := A_n X_n + B_n$ martingál legyen.

7.12 *A log-optimális portfólió*

Az n-edik fogadás során egységnyi fogadási összeg nyereménye ξ_n, ahol $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös eloszlása $\mathbf{P}(\xi_n = +1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_n = -1) = q$, $q + p = 1$, $p > 1/2$. Magyarul: $q < 1/2$ valószínűséggel elveszítjük a befizetett összeget és $p = 1 - q > 1/2$ valószínűséggel a dupláját nyerjük vissza. Az n-edik fogadás során C_n összegre fogadunk. Y_0 a kezdeti vagyonunk és Y_n-el jelöljük az n-edik fogadás eredményhirdetése utáni teljes vagyonunkat. Nyilván: $0 \leq C_n \leq Y_{n-1}$, $n > 0$. Célunk: rögzített N számú fogadás során maximalizálni az $\mathbf{E}(\log Y_N - \log Y_0)$ *várható nyereség rátánkat.* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ a folyamat természetes filtrációja.

(a) Bizonyítandó, hogy tetszőleges *jósolható* C_n fogadási stratégia mellett $Z_n := \log Y_n - n\alpha$ szupermartingál, ahol $\alpha = p \log p + q \log q + \log 2$. Ebből következik, hogy $\mathbf{E}(\log Y_N - \log Y_0) \leq N\alpha$.

(b) Ám létezik olyan fogadási stratégia, amely mellett a fenti Z_n martingál. Tehát a várható nyereség ráta fenti optimális felső korlátja megfelelő stratégia választással elérhető.

7.13 *A Pólya féle urna modell*

Egy urnában piros és kék golyók vannak. Kezdetben egy-egy mindkét színből. Minden egyes $n \in \mathbb{N}$ diszkrét időpontban kihúzunk egy véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kiválasztott golyót az urnából, majd visszatesszük a kihúzottat és még egy ezzel azonos színű golyót is beteszünk az urnába. Így az n-edik menet után $n + 2$ golyó lesz az urnában. Jelöljük ρ_n-nel, illetve β_n-nel az első n húzás során kihúzott piros, illetve kék golyók számát. ($\rho_0 = \beta_0 = 0$ és $\rho_n + \beta_n = n$. Az n-edik húzás után $\rho_n + 1$, illetve $\beta_n + 1$ piros, illetve kék golyó van az urnában.) A folyamat természetes filtrációja $\mathcal{F}_n$. Legyen $M_n := (\beta_n + 1)/(n + 2)$ az urnában lévő kék golyók aránya az n-edik menet után.

(a) Bizonyítsuk be, hogy M_n martingál.

(b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{P}(\beta_n = k) = 1/(n + 1)$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Azaz a piros/kék golyók száma minden egyes lépés után *egyenletes eloszlású.*

(c) Hamarosan belátjuk az u.n. martingál konvergencia tételt, amelyből következik, hogy $\lim_{n\to\infty} M_n =: M_\infty$ egy valószínűséggel létezik. Ezt feltéve, milyen eloszlású M_∞?

7.14 SZÁMÍTÓGÉPES SZIMULÁCIÓ. Írjanak egy szimuláló programot a Pólya féle urnamodell szimulálására. Egy-egy kék és piros golyóval indulva végezzenek 1000 húzást és jegyezzék fel a kék golyók arányát az ezredik menet után. E kísérletet végezzék el 2000-szer és végezzenek elemi statisztikai elemzést: az esetek hanyad részében esik a kék golyók végső aránya a $[0, 0.1)$, $[0.1, 0.2)$, $\ldots$, $[0.9, 1]$ részintervallumokba? Igazolja-e a kompjuteres vizsgálat az előző feladat (d) pontjában kapott eredményt?

7.15 (Pólya-féle urnamodell, még egyszer.)

Az 5. feladat feltételeit és jelölését használjuk. Legyen $\theta \in [0,1]$ rögzített paraméter. Bizonyítandó, hogy

$$N_n(\theta) := \frac{(n+1)!}{\beta_n!(n-\beta_n)!}\theta^{\beta_n}(1-\theta)^{n-\beta_n}$$

martingál.

7.16 *Bayes urna — hamis érmék*

Érmedobást játszunk a következő képpen: először választok egy Θ véletlen számot egyenletes eloszlással a $[0,1]$ intervallumból. A Θ számot *nem közölve* adok magának egy olyan *hamis* érmét, amely Θ valószínűséggel mutat fejet és $(1-\Theta)$ valószínűséggel mutat írást. Maga a Θ értéket nem ismeri, csak a fej-írás sorozatot figyeli meg. Legyen β_n az első n dobás során megfigyelt 'fej'-ek száma.

(a) Bizonyítandó, hogy az itt leírt β_n, $n = 1, 2, \dots$ folyamat eloszlása azonos az 13. feladatban szintén β_n-el jelölt folyamatéval.

(b) Bizonyítandó, hogy a 15. feladatban bevezetett $N_n(\theta)$ pontosan a Θ valószínűségi változó reguláris feltételes sűrűségfüggvénye, β_1, β_2, ..., β_n megfigyelés mellett. (Bayes statisztika)

7.17 (Kis statisztika)

Egy érme θ valószínűséggel mutat FEJet és $1-\theta$ valószínűséggel mutat ÍRÁSt. A $\theta \in (0,1)$ értéket nem ismerjük. Legyen $a, b \in (0,1)$ és két lehetséges hipotézisünk:

$$A := \{\theta = a\}, \qquad B := \{\theta = b\}$$

Legyen

$$Z_n := \frac{\mathbf{P}(X_1, X_2, \dots, X_n|A)}{\mathbf{P}(X_1, X_2, \dots, X_n|B)},$$

ahol $\mathbf{P}(x_1, x_2, \dots, x_n|A)$ (illetve $\mathbf{P}(x_1, x_2, \dots, x_n|B)$) az $x_1, x_2, \dots, x_n$ FEJ-ÍRÁS sorozat megjelenésének valószínűsége az A (illetve B) hipotézis mellett. Mutassuk meg, hogy a Z_n sorozat pontosan akkor martingál, ha a B hipotézis igaz.