Sztochasztikus folyamatok
10. feladatsor
Brown mozgás I.

10.1 Konstruáljon olyan végtelen bináris fát, aminek a 0-dik szintjén van egy $N(m = 0, \sigma^2 = 1)$ eloszlású ős, az n-edik szinten 2^n darab független $N(m = 0, \sigma^2 = 2^{-n})$ eloszlású leszármazott, és minden csúcsra igaz, hogy az ott ülő valószínűségi változó a két gyerekének az összege.

10.2 (a) Legyenek $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ nulla várható értékű valószínűségi változók. Bizonyítandó, hogy akkor és csak akkor *együttesen* normális eloszlásúak, ha léteznek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *független* $N(0, 1)$ (standard normális) eloszlású valószínűségi változók és a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ valós számok, úgy hogy

$$Y_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \cdots + a_{in}X_n.$$

(b) Legyen $B(t)$ standard Brown mozgás ás $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$. Magyarázzuk meg, hogy miért következik a Brown mozgás értelmezéséből, hogy $B(s_1), B(s_2), \ldots, B(s_n)$ együttesen normális eloszlásúak, azaz adjuk meg azokat az a_{ij} együtthatókat, amiknek a segítségével előállíthatóak független standard normálisokból.

(c) Határozzuk meg az $B(s_1), B(s_2), \ldots, B(s_n)$ valószínűségi változók kovariancia mátrixát (Ha $[A]_{i,j} := a_{ij}$, akkor $C = AA^T$).

10.3 **A Brown mozgás skála invarianciája.** Legyen X_t standard Brown mozgás és $Y_t := a^{-1/2}X_{at}$, ahol $a > 0$ rögzített konstans. Bizonyítandó, hogy Y_t is standard Brown mozgás.

10.4 **A Brown mozgás időinverziója.** Legyen X_t standard Brown mozgás és $Y_t := tX_{1/t}$. Bizonyítandó, hogy Y_t is standard Brown mozgás.

10.5 Legyen X_t standard Brown mozgás. Határozzák meg – lehetőleg szenvedés nélkül – a

$$\mathbf{P}(X_2 > 0 | X_1 > 0)$$

feltételes valószínűséget. Függetlenek-e az $\{X_1 > 0\}$ és $\{X_2 > 0\}$ események?

10.6 Legyenek X_t és Y_t *független* standard egy dimenziós Brown mozgások. Bizonyítsák be, hogy $Z_t := X_t - Y_t$ szintén egy dimenziós Brown mozgás. Mennyi a Z_t Brown mozgás szórás (σ) paramétere?

10.7 Jelölje $\Phi(t)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét. Lássa be a tükrözési elv segítségével, hogy a standard Brown-mozgás $[0, t]$ intervallumon vett maximumának, M_t-nek az eloszlásfüggvénye $2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - 1$, ha $x \geq 0$, továbbá azt is, hogy $\mathbf{P}(M_t > x) \leq 2\exp(-\frac{x^2}{2t})$.

10.8 Jelölje B a standard Brown-mozgást. Mutassa meg, hogy $B(t)$ feltételes sűrűségfüggvénye

$$\frac{x}{t}\exp\left(\frac{-x^2}{2t}\right)\mathbb{1}\{x>0\}$$

amellett a feltétel mellett, hogy $B(s)\geq 0$ minden $0\leq s\leq t$-re.

Segítség: A feltétel valószínűsége nulla, így a tükrözési elv segítségével lássa be először, hogy $x,\varepsilon>0$ esetén

$$\mathbf{P}\left(B(t)\geq x-\varepsilon \mid \min_{0\leq s\leq t} B(s)\geq -\varepsilon\right)=\frac{\Phi\left(\frac{\varepsilon-x}{\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{-\varepsilon-x}{\sqrt{t}}\right)}{2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)-1}$$

majd tartson ε-nal 0-hoz.

10.9 Jelölje T_x azt a véletlen időpontot, amikor a standard Brown-mozgás először éri el az x magasságot. Határozza meg T_x eloszlásfüggvényét és lássa be, hogy $\mathbf{P}(T_x>t)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{\sqrt{t}}$, ha $1\ll t$.

10.10 (a) Jelölje B a standard Brown-mozgást. Lássa be, hogy

$$M(t)=\exp\left(\lambda B(t)-\frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

martingál az $\mathcal{F}_t:=\sigma(B(s):0\leq s\leq t)$ természetes filtrációra nézve, azaz mutassa meg, hogy $s<t$ esetén $\mathbf{E}(M(t)\mid\mathcal{F}_s)=M(s)$.

(b) Jelölje T_x azt a véletlen időpontot, amikor a standard Brown-mozgás először éri el az x magasságot. Lássa be, hogy $\lambda\geq 0$ esetén $\mathbf{E}\left(\exp(-\lambda T_x)\right)=e^{-x\sqrt{2\lambda}}$, azaz határozza meg T_x eloszlásának Laplace-transzformáltját.

Segítség: $M(t\wedge T_x)$ korlátos martingál, $\mathbf{P}(T_x<\infty)=1$.

(c) Jelölje F_x a T_x eloszlását. Lássa be kétféleképp (az előző részfeladat alapján, illetve a Brown-mozgás tulajdonságaiból levezetve), hogy

$$F_x * F_y = F_{x+y}$$

(d) Lássa be kétféleképp, hogy $x^2\cdot T_1\sim T_x$.

10.11 Jelölje $B(t), t\geq 0$ a standard Brown-mozgást. Lássa be, hogy az $X(t):=e^{-t}B(e^{2t}), t\in\mathbb{R}$ folyamat egy stacionárius Markov-folyamat, és határozza meg az átmenenetmagfüggvényét, azaz azt a $p_t(x,y)$ függvényt, amire $\mathbf{P}(X(s+t)\in A\mid X(s)=x)=\int_A p_t(x,y)dy$.