Sztochasztikus folyamatok
11. feladatsor
Brown-mozgás II., Gauss-folyamatok

11.1 Konstruáljon olyan végtelen bináris fát, aminek a 0-dik szintjén van egy $N(m = 0, \sigma^2 = 1)$ eloszlású ős, az n-edik szinten 2^n darab független $N(m = 0, \sigma^2 = 2^{-n})$ eloszlású leszármazott, és minden csúcsra igaz, hogy az ott ülő valószínűségi változó a két gyerekének az összege. Miért ekvivalens ez a Brown-mozgás megkonstruálásával?

11.2 Legyen X_t standard Brown mozgás. Határozzák meg – lehetőleg szenvedés nélkül – a

$$\mathbf{P}(X_2 > 0 | X_1 > 0)$$

feltételes valószínűséget. Függetlenek-e az $\{X_1 > 0\}$ és $\{X_2 > 0\}$ események?

11.3 **A Brown mozgás horizontális tükrözése** Legyen $B(t)$ standard Brown mozgás a $[0, 1]$ intervallumon és $W(t) := B(1 - t) - B(1)$, Bizonyítandó, hogy W is standard Brown mozgás.

11.4 Ha g folytonosan differenciálható és f folytonos függvény, akkor az $\int_0^t f(s)dg(s)$ előjeles Riemann-Stieltjes integrál megegyezik a $\int_0^t f(s)g'(s)ds$ Riemann-integrálal. Mivel a Wiener-folyamat deriváltja a fehér zaj, így ezzel az eljárással nem definiálható $\int_0^t f(s)dB(s)$. Használja helyette a Riemann-integrál definícióját, és közelítse f-et lépcsős függvényekkel! Lássa be, hogy $X(t) = \int_0^t f(s)dB(s)$ Gauss-folyamat és számítsa ki a $\mathbf{Cov}(X(s), X(t))$ autokovariancia-függvényt.

11.5 *A stacionárius Ornstein-Uhlenbeck-folyamat ekvivalens jellemzései*

(a) Jelölje $B(t), t \geq 0$ a standard Brown-mozgást. Lássa be a Brown-mozgás önhasonlóságának felhasználásával, hogy $\beta \in \mathbb{R}_+$ esetén az $X(t) := e^{-\beta t}B(e^{2\beta t}), t \in \mathbb{R}$ folyamat egy stacionárius sztochasztikus folyamat.

(b) Lássa be, hogy $X(t)$ időben homogén Markov folyamat, és határozza meg az átmenenetmagfüggvényét, azaz azt a $p_t(x, y)$ függvényt, amire

$$\mathbf{P}(X(s + t) \in A \mid X(s) = x) = \int_A p_t(x, y)dy$$

(c) Legyen $Y(0) \sim N(0, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ és $t \geq 0$-ra

$$Y(t) := e^{-\alpha t}Y(0) + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s}dB(s)$$

Lássa be, hogy $Y(t)$ stacionárius Gauss-folyamat.

(d) Mely α, β értékek esetén azonos eloszlásúak az X és Y sztochasztikus folyamatok?

11.6 Legyenek $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ együttesen normális eloszlásúak. Legyen $\mathbf{E}(Y_i) = \mathbf{E}(X) = 0$. Jelölje $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ az $Y_1, \ldots, Y_n$ kovarianciamátrixát és a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ oszlopvektor i-edik eleme legyen $\mathbf{Cov}(Y_i, X)$. Legyen $0 < \sigma^2 = \mathbf{Var}(X)$. Lássa be, hogy az $Y_1, \ldots, Y_n$ együttes feltételes eloszlása az $X = 0$ feltétel mellett együttesen normális, melynek várható érték vektora azonosan nulla és kovarianciamátrixa $\mathbf{C} - \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{c}\mathbf{c}^T$.

Segítség: Cholesky-felbontás: minden pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix felírható AA^T alakban, ahol A egy alsó háromszög mátrix.

11.7 *A Brown-híd ekvivalens jellemzései*

Jelölje $B(t)$ a standard Brown-mozgást a $[0, 1]$ intervallumon. Mutassa meg, hogy az alábbi három sztochasztikus folyamat eloszlása azonos:

(a) $B(t)$ amellett a feltétel mellett, hogy $B(1) = 0$.

(b) $B(t) - tB(1)$.

(c) $(1 - t)B(1/(1 - t))$.

11.8 *A Cauchy-folyamat konstrukciója*

Legyenek $X(t)$ és $Y(t)$ független standard Brown-mozgások. $x > 0$ esetén jelölje T_x azt a véletlen időpontot, amikor X először éri el x-et.

(a) Lássa be, hogy $Y(T_1)$ standard Cauchy eloszlású.

(b) Lássa be, hogy $Z(x) = Y(T_x)$ standard Cauchy-folyamat.