Sztochasztikus folyamatok
9. feladatsor
Martingálok III. / Sztochasztikus félcsoportok

9.1 *Azuma-egyenlőtlenség, avagy nagy eltérés-becslés martingálokra*

Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók. Legyen φ olyan n változós függvény, hogy tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$-re és $1 \leq k \leq n$-re és $\hat{x}_k$-ra

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - \varphi(x_1, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, x_n)| \leq 1$$

Legyen $Y := \varphi(X_1, \ldots, X_n)$.

Bizonyítandó, hogy tetszőleges $a \geq 0$-ra

$$\mathbf{P}\left(Y - \mathbf{E}(Y) \geq a\right) \leq e^{-a^2/2n},$$
$$\mathbf{P}\left(Y - \mathbf{E}(Y) \leq -a\right) \leq e^{-a^2/2n}.$$

(a) Legyenek $X_1, \ldots, X_n$ független valószínűségi változók és $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ az általuk generált természetes filtráció. Legyen φ olyan n változós függvény, hogy tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$-re és $1 \leq k \leq n$-re és $\hat{x}_k$-ra

$$|\varphi(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) - \varphi(x_1, \ldots, \hat{x}_k, \ldots, x_n)| \leq 1$$

Mutassa meg, hogy ha $M_k = \mathbf{E}\big(\varphi(X_1, \ldots, X_n)|\mathcal{F}_k\big)$, akkor

$$\mathbf{P}\big(|M_k - M_{k-1}| \leq 1\big) = 1$$

(b) *Gauss-dominancia*

Legyen X olyan valószínűségi változó, amire $\mathbf{E}(X) = 0$ és $\mathbf{P}(|X| \leq 1) = 1$. Lássa be, hogy

$$\mathbf{E}(e^{\beta X}) \leq e^{\frac{\beta^2}{2}}$$

Súgás: vegye mindkét oldal logaritmusát, és alkalmazza a logaritmikus momentumgeneráló függvény első és második deriváltjának valószínűségszámítási jelentéséről tanultakat.

Megj: Azért hívják ezt Gauss-dominanciának, mert az egyenlőtlenség jobb oldalán a standard normális eloszlás momentumgenerálófüggvénye áll.

(c) Lássa be, hogy ha M_n martingál, $M_0 = 0$, és $\mathbf{P}\big(|M_k - M_{k-1}| \leq 1\big) = 1$, akkor

$$\mathbf{E}\left(e^{\beta M_n}\right) \leq e^{\frac{\beta^2}{2} n}$$

(d) Az előző részfeladat feltevései mellett lássa be, hogy

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} M_k \ge a\right) \le e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

9.2 Jelölje $\mathbf{P}_x$ az $x \in \mathbb{Z}$-ből indított egyszerű, szimmetrikus bolyongás szerinti valószínűséget és T_y az $y \in \mathbb{Z}$ elérési idejét. A feladat célja a következő egyenlőtlenségek bizonyítása:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n}} \le \mathbf{P}_1(T_0 > n) \le 2\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(a) A felső becslés bizonyításához súgás: Legyen $y \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Figyeljük a bolyongást addig, amíg bele nem ütközik az y magas és n széles doboz falába valahol. Lássa be, hogy

$$\mathbf{P}_1(T_0 > n) \le \mathbf{P}(\text{A doboz oldalába vagy a tetejébe ütközik}) \le \mathbf{P}_1(T_0 \wedge T_y > n) + \mathbf{P}_1(T_y < T_0)$$

majd alkalmazza a Markov-egyenlőtlenéget.

(b) Az alsó becsléshez lássa be először, hogy tetszőleges $y \in \mathbb{N}$-re

$$\mathbf{P}_y(T_0 \le n) = \mathbf{P}_0(T_y \le n) \le \mathbf{P}_0(T_y \wedge T_{-y} \le n) \le \frac{n}{y^2}$$

Segítség: alkalmazza martingál-megállítási tételt az $S_n^2 - n$ martingálra, és legyen a megállási idő $T = T_y \wedge T_{-y} \wedge n$.

(c) Az alsó becslés bizonyításához: $\mathbf{P}_1(T_0 > n) \ge \mathbf{P}_1(T_0 > n \mid T_y < T_0)\mathbf{P}_1(T_y < T_0)$.

Nevezetes folytonos idejű és állapotterű sztochasztikus félcsoportok:

A **sodródó** (angolosan: **driftes**) **Brown mozgás** félcsoportja. Állapottér: $S = \mathbb{R}$. Rögzített paraméterek: szórás: $\sigma > 0$; sodródási együttható (vagy drift): $m \in R$.

$$p_t(x, A) := \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(y-x-mt)^2}{2\sigma^2 t}} dy.$$

A **Cauchy folyamat** félcsoportja (standard paraméter választással). Állapottér: $S = \mathbb{R}$.

$$p_t(x, A) := \int_A \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + (y-x)^2} dy.$$

9.3 Ellenőrízzük a fenti magfüggvényekre a $p_{s+t}(x, A) = \int_S p_s(x, dy) p_t(y, A)$ félcsoport tulajdonságot.

9.4 Bizonyítsuk be, hogy a driftes Brown mozgás esetében minden $x \in S$-re és minden $\varepsilon > 0$-ra

$$p_h(x, (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = 1 - o(h)$$

vagy, ami ugyanaz:

$$p_h(x, S \setminus (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) = o(h)$$

amint $h \to 0$. Mi a helyzet a Cauchy folyamattal?