10.1 Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók sorozata, legyen $N \geq 2$ olyan, hogy

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{N-1}, \quad X_{N-1} < X_N.$$

Azaz az N-edik az első tagja a sorozatnak, ahol a sorozat növekvővé válik. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(N) = \mathrm{e}$. (*Tipp: érdemes először kiszámolni* $\mathbf{P}\{N \geq n\}$*-t.*)

10.3 n-szer feldobunk egy p valószínűséggel fejet adó érmét. Számoljuk ki az $1, 2, \ldots, k$ hosszú csupa fej részsorozatok várható számát! $(1 \leq k \leq n)$

10.4 Tízszer feldobunk egy hamis érmét, amin a fej valószínűsége p. Jelölje X a tiszta sorozatok számát (mint a 4.4 feladatban). Mennyi X várható értéke? (Vigyázat: az érme ezúttal hamis.)

Bónusz Tekintsük az n hosszú $0-1$ kódokat, ahol minden koordináta független, p valószínűséggel 0, $1-p$ valószínűséggel 1. Gondoljunk ezekre úgy, mint egy gráf csúcsaira. Két csúcs közt menjen pontosan akkor él, ha csak a kódjuk legvégén lévő tiszta blokkban térnek el, vagyis valamely közös kezdeti rész után az egyik kód csupa 0-val, a másik csupa 1-gyel folytatódik. (Tehát pl. 1110011000 szomszédjai: 1110011001, 1110011011 és 1110011111.) Sorsolok egy 0-val illetve egy 1-gyel kezdődő kódot a fenti eloszlással, vagyis a többi koordinátát már függetlenül p valószínűséggel 0-nak, $1-p$-vel 1-nek. Mennyi az így kapott két kód közt húzott legrövidebb út várható értéke? Mi a válasz, ha $p = 1/2$? *Segítség: írjunk fel két ilyen kódot, és találjuk ki, hogyan jutunk el egyiktől a másikig a legrövidebb módon! Hogy kapcsolódik ez vajon a tiszta blokkok számához? És: vigyázzunk, hogy az egyik kód* 0*-val kezdődik a másik pedig* 1*-gyel!*

10.5 •• Egy urnában van M piros és N kék golyó. A golyókat visszatevés nélkül kihúzzuk egymás után az urnából. Tiszta sorozat alatt azokat a maximális hosszú húzássorozatokat értjük, melyek során a kihúzott golyók azonos színűek. Jelölje X, hogy az $N+M$ hosszú húzássorozatunk hány tiszta sorozatból áll. $\mathbb{E}X = ?$

10.6 Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy egy rekordérték tűnik fel j-kor ($j \leq n$), ha $X_j \geq X_i$ minden $1 \leq i \leq j$ esetén. Mutassuk meg, hogy

a) $\mathbf{E}[\text{rekordértékek száma}] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

b) $\mathbf{D}^2[\text{rekordértékek száma}] = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{j^2}$.

10.7 Legyenek X és Y független azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók. $\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} = ?$

10.8 Három próbálkozási lehetőségünk van, mindegyik próbálkozás azonos valószínűséggel sikeres. Jelölje X a sikeres próbálkozások számát. Ha tudjuk, hogy $\mathbf{E}(X) = 1.8$,

a) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legnagyobb értéke?

b) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legkisebb értéke?

Mindkét esetben találjunk ki egy valószínűségi forgatókönyvet, aminek eredménye $\mathbf{P}\{X = 3\}$, és ez az érték a lehető legnagyobb/legkisebb. (*Tipp: a b) rész megoldását kezdhetjük úgy is, hogy legyen* U *a* $(0, 1)$*-en egyenletes valószínűségi változó, majd definiáljuk a próbálkozásokat* U*-val kifejezve.*)

10.9 Lacika addig dobál egy dobókockát, amíg nem sikerül neki kétszer *egymás után* hatost dobni. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke? (Segítség: nézzünk feltételes várható értékeket!)

10.10 **a)** Ha $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg $\mathbf{E}[(2 + X)^2]$ és $\mathbf{D}^2(4 + 3X)$ értékét.

b) Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X - Y)^2]$ értékét.

10.11 Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ-t használnunk?

10.12 •• Legyen az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ pontok által meghatározott háromszögben.

a) Mi lesz az (X, Y) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

b) Legyen $Z = 3X + 4Y$. Mi lesz az (X, Z) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

10.13 **a)** Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

b) Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

10.14 A rulettkeréken 37 mező van, 0-tól 36-ig számozva. Xavér mindig arra fogad, hogy az eredmény 19 vagy annál nagyobb szám, Yvett mindig arra, hogy az eredmény 3-mal való osztás szerinti maradéka 1 (tehát az $\{1; 4; 7; \ldots; 34\}$ számok valamelyike). Tekintsünk 20 független pörgetést; jelölje X, illetve Y, hogy ennek során hányszor nyer Xavér, illetve Yvett. (Az is lehet, hogy egy pörgetésnél mindketten nyernek, és az is, hogy egyikük sem.) Számoljuk ki X és Y korrelációs együtthatóját.

10.15 •• X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)}, & \text{ha } x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X,\,Y)=1$.

b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X^2|Y=y)$-t is.

10.16 Az X és Y valószínűségi változók együttesen abszolút folytonos eloszlásúak, X peremsűrűség-függvénye $f_X(x)=\lambda^2 x e^{-\lambda x}$ ha $x\geq 0$, és 0 ha $x<0$ (legyen $\lambda=1/2$); Y feltételes eloszlása X rögzítése mellett pedig egyenletes a $[0,X]$ intervallumon. Határozzuk meg

a) az együttes sűrűségfüggvényt (ügyeljünk a tartományokra),

b) Y peremsűrűség-függvényét és $\mathbb{E}(Y)$-t,

c) $\mathbb{E}(Y|X=x)$-t és $\mathbb{E}(X|Y=y)$-t,

d) $\mathbb{E}(X)$-t (itt egyszerűbb, ha használjuk az előző részfeladatot), illetve

e) $\mathbf{Cov}(X,\,Y)$-t.

f) Emlékezzünk vissza a 9.14 feladatra.

10.17 •• A 2 egység hosszúságú PQ szakaszt kettétörjük az egyenletes eloszlással választott R pontban. Jelölje a PR szakasz hosszát X. Ezek után a megmaradó, $2-X$ egység hosszú RQ szakasz mentén választunk egyenletes eloszlással egy S töréspontot. Jelölje az RS szakasz hosszát Y.

(a) Írjuk fel az (X,Y) pár közös sűrűségfüggvényét. Figyeljünk a tartományokra.

(b) $\mathbb{E}(Y|X=x)=?$ $\mathbb{E}(Y)=?$

(c) Számoljuk ki $Cov(X,Y)$-t.

10.18 •• Egy *gráf csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. (Ezt hívják Erdős-Rényi véletlen gráfnak.) Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i,\,D_j)$ korrelációs együtthatóját. (*Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az $X_i,\ X_j$, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.*)

10.19 Egy liftbe a földszinten belépő emberek száma egy ismeretlen eloszlású X valószínűségi változó, 1-nél nagyobb várható értékkel. n emelet van és minden ember egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel száll ki az n emelet bármelyikén. Legyen Y az a valószínűségi változó, hogy hányszor áll meg a lift, míg az utolsó utast is kirakja. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{E}(Y)<\mathbf{E}(X)$.

10.20 Az előző feladatban tegyük föl, hogy X eloszlása Poisson, 10 várható értékkel. Számoljuk ki $\mathbf{E}(Y)$-t.

10.21 Egy ember autóbaleseteinek száma egy adott évben λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ez a λ paraméter minden embernél más és más, a népesség 60 százalékánál 2, 40 százalékánál 3. Ha véletlenül kiválasztunk egy embert, mi a valószínűsége annak, hogy

a) nem történt vele baleset,

b) pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben?

c) Mi a feltételes valószínűsége, hogy pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben, feltéve, hogy előző évben nem történt vele baleset?

d) Ismételjük meg az előzőeket, ha az x-nél kisebb λ paraméterrel rendelkező emberek aránya a népességben $1-\mathrm{e}^{-x}$.

10.22 Legyenek $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg

$$\mathbf{E}(X_1\,|\,X_1+X_2+\cdots+X_n=x)$$

értékét. (*Tipp:* $\mathbf{E}(X_1+X_2+\cdots+X_n\,|\,X_1+X_2+\cdots+X_n=x)$.)

10.23 Hamis érmével dobunk, de nem tudjuk, hogy mennyire torzít az érme. Előzetesen annyit elárult nekünk a torz-érme gyár, hogy egyenletesen torzítják az érméket, vagyis mindenféle $p\in[0,\,1]$ egyenletesen fordul elő. Az első írást n.-szerre dobtuk (addig csupa fejet). Mit tippelünk, mekkora a p? (Mi a legvalószínűbb p?) Alulról illetve felülről (0-tól c-ig illetve c-től 1-ig) mekkora intervallumnak van már elég nagy (mondjuk 0.95-ös) valószínűsége, hogy oda esik a p?