3.2 50 százalék az esélye, hogy a királynő hordozza a hemofíliáért felelős gént. Ha hordozó, akkor mindegyik hercegnek 50-50 százalék az esélye arra, hogy hemofíliás legyen. Ha a királynő három fia nem hemofíliás, mekkora az esélye annak, hogy a királynő hordozó? Ha születik egy negyedik herceg is, mekkora az esélye annak, hogy hemofíliás lesz?

3.3 4 férfit és 6 nőt rangsorolnak egy vizsgán. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma pontszám, és mind a 10! elrendezés egyformán valószínű. Legyen X a legjobb nő helyezése (például $X = 1$ azt jelenti, hogy a legjobb vizsgázó egy nő). Határozzuk meg X eloszlását és várható értékét.

3.4 Öt játékos, A, B, C, D, E között véletlenszerűen szétosztjuk a számokat 1-től 5-ig, ismétlődés nélkül. Először A és B mérkőzik: akinek magasabb a száma, továbbjut. Az így továbbjutó most C-vel mérkőzik, azután a közülük továbbjutó D-vel, majd az itt nyertes E-vel. Legyen X az a szám, ahány mérkőzést A nyer. Határozzuk meg X eloszlását és várható értékét.

3.5 Szindbádnak egyszer megadatott, hogy N háremhölgy közül kiválassza a legszebbet a következő játékszabály szerint: az N háremhölgy egyenként vonult el előtte, azok valamelyikét kellett kiválasztania. A már elvonultak nem hívhatók vissza és azokról, akik még nem vonultak el, semmit sem tudott. Feltételezzük, hogy a háremhölgyeknek jól definiált szépségfokozatuk van: van egy legszebb, egy második legszebb, egy harmadik legszebb, és végül a legkevésbé szép közöttük. Továbbá azt is feltételezzük, hogy véletlen sorrendben vonulnak el Szindbád előtt: mind az $N!$ lehetséges sorrendjük egyformán valószínű.

Szindbád a következő stratégiát választotta: k hölgyet hagyott elvonulni, majd ezután kiválasztotta azt, amelyik szebb volt az összes előtte már elvonultnál (és ha ilyen hölgy nem akad, akkor Szindbád magányosan távozik). Mi a valószínűsége annak, hogy ezzel a módszerrel valóban a legszebb háremhölgyet választotta? Határozzuk meg azt a k-t, amely mellett a fenti stratégia optimális $N \to \infty$ határesetben, és a stratégiához tartozó valószínűséget is. (*Tipp: használjunk teljes valószínűség tételt aszerint, hogy a legszebb hölgy hanyadikként jön(ne) el Szindbád előtt.*)

3.6 Egy családban $n \geq 1$ gyermek αp^n valószínűséggel van, ahol $\alpha \leq (1-p)/p$.

a) A családok hányadrészében nincs gyermek?

b) Ha a gyermekek egymástól függetlenül egyforma eséllyel fiúk és lányok, akkor a családok hányadrészében lesz pontosan k fiú (és tetszőleges számú lány)?

3.7 Van két ránézésre megkülönböztethetetlen érménk, egy igazságos és egy cinkelt. A cinkelt érme $\frac{3}{4}$ valószínűséggel ad fejet. Előveszem az egyik érmét a zsebemből, $\frac{1}{2}$ eséllyel az igazságosat, $\frac{1}{2}$ eséllyel a cinkeltet, és feldobom 30-szor, ebből k alkalommal esett a Fej oldalára. Ez alapján kell eldöntenem, hogy melyik érmét választottam. Milyen k értéknél húznánk meg a határt?

3.8 Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymásután n-szer dobunk.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? ($k = 1, 2, \ldots, n$)

b) Feltéve, hogy mind az első $k-1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$)

3.9 Adott $m+1$ urna és mindegyikben m golyó; az i-dik urnában $i-1$ golyó piros, míg a fennmaradó $m-i+1$ golyó kék ($i = 1, \ldots., m+1$). Először választunk egy urnát egyenletes eloszlással, majd onnantól kezdve ebből az urnából húzunk *visszatevéssel* n alkalommal.

a) Mi a valószínűsége, hogy az n húzás mindegyike piros golyót ad?

b) Föltéve, hogy az első n húzás mind piros golyót adott, mi a valószínűsége, hogy az $(n+1)$-dik húzás is piros lesz?

c) Számoljuk ki a (b) részben kapott valószínűség határértékét, *rögzített n-re, amint $m \to \infty$.*

3.10 Egy ketyere két különböző okból romolhatott el. Az első ok ellenőrzése E_1 forintba kerülne, és ha valóban az a probléma, akkor a javítása J_1 forint. Hasonlóan, a második ok ellenőrzése E_2 forintba kerül, és ha az a probléma, akkor a javítás J_2 forint. (Ha viszont az először ellenőrzött oknál nincs probléma, akkor a másik lehetséges okot először ellenőriznünk kell, majd javítanunk.) Legyen p és $1-p$ annak valószínűségei, hogy a ketyere az első illetve a második okból romlott el. Határozzuk meg, mely $E_1,\ E_2,\ J_1,\ J_2,\ p$ értékek mellett érdemesebb várhatóan az első okkal kezdeni az ellenőrzést, és melyeknél a második okkal.

3.11 •• A Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatóak: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ában engedik előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ában. Láttam, hogy Jancsi előre engedte Juliskát, Jutkát viszont nem.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsi az udvariatlan kategóriába tartozik?

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után Jancsi Erzsit is előre fogja engedni?

3.13 Két dobókockát dobálunk, és mindig az összeget tekintjük. Addig dobunk, míg a két kockán lévő pöttyök összege 7 vagy 11 nem lesz.

a) Mi a valószínűsége, hogy amikor megállunk, 7 az összeg?

b) Lássuk be, hogy a dobások száma és az, hogy mennyi az összeg megálláskor, függetlenek. Azaz, tekintsük a következő eseményeket:

$$A_k = \{\text{k-szor dobunk}\},\ k = 1, 2, ... \qquad \text{illetve } B = \{\text{Megálláskor az összeg 7}\};$$

és mutassuk meg, hogy minden $k \geq 1$ esetén A_k és B független események.

3.14 Annának és Borinak van két szabályos dobókockája, egy fehér és egy sárga kocka, és a következő szabályok szerint játszanak. Először Anna dob a két kockával, és ha a két kockán ugyanaz a szám áll, ő nyer. Ha Anna dobásakor a két kockán különböző számok állnak, Bori megkapja a kockákat és most ő dob: ha sikerül legalább egy hatost dobnia, ő nyer. Ha nem, akkor az első fordulóban nincs győztes, és megismétlik az eljárást, tehát felváltva dobnak addig, amíg valamelyikük nem nyer.

a) Jelölje X, hogy összesen hány fodulóra kerül sor. Adjuk meg X valószínűség-eloszlását és várható értékét!

b) Mi a valószínűsége, hogy a teljes játék Anna győzelmével ér véget?

3.15 •• Anna és Bori a következőképp játszanak. Először feldobnak egy cinkelt érmét, ami p valószínűséggel esik a Fej oldalára. Ha a dobás Fej, Anna nyer, Bori fizet neki 100 forintot, és véget ér a játék. Ha Írás, egy szabályos érmét dobnak fel. Ha ez a második dobás Fej, Bori nyer és kap Annától 100 forintot. Ha Írás, megismétlik egyanezt a kísérletet (cinkelt, majd Írás esetén egy szabályos érme feldobása). Ezt folytatják addig, amíg valaki nem nyer.

a) Hogyan válasszuk p-t, ha azt szeretnénk, hogy igazságos legyen a játék?

b) Jelölje X, hogy hányadik kísérlet alkalmával ér véget a játék (tehát pl. az $IIIIF$ sorozat esetén $X = 3$). Számoljuk ki X várható értékét.

3.16 •• Xavér és Yvett a következő játékot játszák. Egy urnában van 5 piros és 5 kék golyó. Két golyót húznak, ha a golyók azonos színűek, Xavér fizet Yvettnek 100 forintot, ha a golyók különböző színűek, Yvett fizet Xavérnak x forintot. Hogyan válasszák x-t, ha azt szeretnék, hogy igazságos legyen a játék?

3.17 Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kevés dereng, így minden kérdésre a többitől függetlenül 60% eséllyel ad helyes választ. A ketteshez legalább 8 helyes választ kell adnia.

a) Milyen valószínűséggel megy át Pisti a vizsgán?

b) Ha Pisti megbukik, a kövekező vizsgán ismét tanulás nélkül próbálkozik addig, amíg egyszer nem sikerül. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét.

3.18 •• Amerikában egy esküdtszék elítéli a vádlottat, ha a 12 esküdtből legalább 8 bűnösnek szavazza. Ha minden esküdt $\theta = 0,9$ valószínűséggel dönt helyesen, akkor mi a valószínűsége a helyes döntésnek? Tegyük fel, hogy a vádlott $p = 0,65$ valószínűséggel bűnös valójában.

3.19 Kaszinóban az alábbi játékot játszuk: Minden lépésben fogadunk előre az $i = 1, 2, \dots, 6$ számok valamelyikére, majd feldobnak 3 kockát. Ahányszor kijött a fogadott számunk, annyi petákot kapunk, ellenben fizetnünk kell 1 petákot, ha egyszer sem jött ki a fogadott szám. Fair-e a játék?

3.20 Egy n komponensű rendszer alkatrészei egymástól és a múltjuktól is függetlenül minden nap p valószínűséggel meghibásodnak, de ezeket esténként kijavítjuk. A rendszer leáll, ha legalább k alkatrész meghibásodott. Mi annak a valószínűsége, hogy először a t. napon áll le a rendszer?

Bónusz Pólya urna: Egy urnában kezdetben a piros és b kék golyó van. Minden egyes lépésben kihúzunk egy golyót, megnézzük, milyen színű, majd őt és egy vele megyegyező színű golyót visszateszünk. (Vagyis a golyók száma az urnában minden lépésben eggyel nő). Legyen $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{2}$. Mi a valószínűsége, hogy a t. lépés után k kék golyó van az urnában ? $(k = 1 \dots (t+1))$

3.21 Egy vetélkedőn egy házaspár alkot egy csapatot. Amikor a műsorvezetőtől egy eldöntendő kérdést kapnak, mindketten egymástól függetlenül p valószínűséggel adnának helyes választ. Mi a jobb stratégia:

a) egyiküket kijelölik, aki a másikra nem hallgatva válaszol a kérdésre, vagy

b) mindketten gondolkodnak a kérdésen, ha egyetértenek, ezt a választ adják, ha pedig különböző a véleményük, egy szabályos pénzérme feldobásával döntik el, hogy mit válaszoljanak.

3.22 •• Véletlenszerűen elhelyezünk egy királyt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

3.23 Egy gép véletlenszerűen választ 1 és 10 közötti számot, amit nekünk kell kitalálni, úgy, hogy kérdéseket teszünk fel, amire a gép igennel vagy nemmel válaszol. Számoljuk ki, várhatóan hány kérdést kell a gépnek feltennünk,

a) ha csak rákérdezhetünk, azaz azt kérdezzük, hogy „A gondolt szám i?” $i = 1, 2, \dots, 10$, illetve

b) ha kérdéseinkkel mindig megpróbáljuk megfelezni a fennmaradó lehetséges számok körét.

3.24 **(Szentpétervári paradoxon)** Egy érmével addig dobunk, míg a fej oldalára nem esik. Ha az n-edik feldobás eredménye fej, akkor a játékos 2^n forintot nyer. Mutassuk meg, hogy a nyeremény várható értéke végtelen!

a) Megéri-e egy játékért 1 millió forintot fizetni?

b) Megéri-e játékonként 1 millió forintot fizetni, ha annyiszor játszunk, ahányszor csak akarunk, és csak az összes játék befejezése után van elszámolás?

3.25 Egy embernek n kulcsa van, amelyek közül egyetlen egy nyit egy bizonyos ajtót. Emberünk véletlenszerűen próbálkozik a kulcsokkal mindaddig, amíg rá nem talál a megfelelő kulcsra. Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét, ha

a) a sikertelen kulcsokat nem zárja ki a további próbálkozások során (visszatevéses húzások),

b) a sikertelen kulcsokat kizárja a további próbálkozások során (visszatevés nélküli húzások).