6.1 Tegyük fel, hogy X eloszlásfüggvénye, F a következőképpen adott:

$$F(b)=\begin{cases}0 & \text{ha } b<0\\ \dfrac{b}{4} & \text{ha } 0\le b\le 1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{b-1}{4} & \text{ha } 1<b\le 2\\ \dfrac{11}{12} & \text{ha } 2<b\le 3\\ 1 & \text{ha } 3<b\end{cases}$$

a) Számoljuk ki $\mathbf{P}\{X=i\}$-t, $i=1,2,3$.

b) Mennyi $\mathbf{P}\{\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\}$?

6.2 Egy rendszer a bekapcsolástól számítva X hónapig működik. Határozzuk meg X várható értékét, és annak valószínűségét, hogy a rendszer legalább 5 hónapig működik, ha X sűrűségfüggvénye:

$$f(x)=\begin{cases}Cx\mathrm{e}^{-x/2} & \text{ha } x>0,\\ 0 & \text{ha } x\le 0.\end{cases}$$

6.3 Legyen

$$f(x)=\begin{cases}C(3x-x^3) & \text{ha } 0<x<\dfrac{5}{2},\\ 0 & \text{különben,}\end{cases}$$

és

$$g(x)=\begin{cases}C(3x-x^2) & \text{ha } 0<x<\dfrac{5}{2},\\ 0 & \text{különben.}\end{cases}$$

Lehet-e f ill. g sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg C-t és az f ill. g által meghatározott eloszlások várható értékét!

6.4 Az A és B konstansok milyen értéke mellett lehetnek eloszlásfüggvények a következő függvények?

a)

$$F(x)=\exp(-Ae^{-Bx});$$

b) •

$$F(x)=A+B\tanh x;$$

c) •

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{ha } -\infty<x\le 0,\\ \dfrac{1+Ax}{B+x} & \text{ha } 0<x<+\infty.\end{cases}$$

6.5 A C konstans milyen értéke mellett lehetnek sűrűségfüggvények a következő függvények? Ezekben az esetekben állapítsuk meg a várható értéket, valamint annak valószínűségét, hogy a megfelelő val. változó értéke $\frac{1}{2}$ és 2 közé esik.

a) •

$$f(x)=\begin{cases}C\cdot\sin(2\pi x) & \text{ha } 0\le x\le\dfrac{3}{2},\\ 0 & \text{különben;}\end{cases}$$

b) •

$$f(x)=\begin{cases}C\cdot(-x\ln x) & \text{ha } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{különben;}\end{cases}$$

c)

$$f(x)=\begin{cases}C\cdot x^{-5} & \text{ha } 1\le x,\\ 0 & \text{különben}\end{cases}$$

6.6 Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x)=\begin{cases}5(1-x)^4, & \text{ha } 0<x<1,\\ 0, & \text{egyébként}\end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

6.10 Egyenletesen választunk egy pontot a $(0, 1)$ intervallumból, jelölje ezt X. Mi annak a valószínűsége, hogy X, $1-X$ és $1/2$ háromszöget alkot?

6.11 Konstruálható-e olyan folytonos $g : [0,\ 1] \to [0,\ \infty)$ függvény, amelyre $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^1 x^2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a^2$?

Bónusz Ha egy találkozóra $s \in \mathbb{R}$ perccel korábban érkezem a megbeszéltnél, $a \cdot s$ petákot fizetek, ha s percet kések, $b \cdot s$-t fizetek. Az utazás a mai kaotikus közlekedési feltételek miatt meglehetősen véletlen ideig tart, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mikor induljak, ha a várható költséget szeretném minimalizálni? (Tipp: Írjuk fel a várható költséget integrálalakban és deriváljuk.)

6.12 A buszok rendre minden óra egészkor, 15-kor, 30-kor és 45-kor indulnak a megállóból. Ha véletlenszerűen érkezem 7:00 és 7:30 közt, mi annak a valószínűsége, hogy

a) 5 percnél kevesebet várok?

b) 8 percnél többet várok?

c) Ugyanez a két kérdés, ha 7:08 és 7:38 közt érkezem egyenletesen.

d) És ha 7:00 és 7:25 közt érkezem egyenletesen?

6.13 A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

c) Mi a helyzet akkor, ha B felé gyakrabban, vagyis 7:05-től kezdve 10 percenként indulnak a buszok? Számoljuk ki az előző két kérdés valószínűségét erre az esetre is!

6.14 Egy busz A és B városok között jár, mely városok 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton; ilyenkor a legközelebbi szervízből kijönnek a szerelők és megjavítják a buszt a helyszínen. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése? Milyen értelemben?

6.15 •• Egy egységhosszú ropin van egy sódarab az s helyen. Mire hazaérünk a boltból, a táskánkban véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) kettétörik a ropi a csomagban. Mi a sódarabot tartalmazó ropidarab hosszának várható értéke?

6.16 •• Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy szabályos háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala 1 hosszúságú. Jelölje ξ e pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

6.17 •• Pistike randevút beszélt meg Juliskával este 6-ra. Pistike két úton is eljuthat a megbeszélt randevú helyszínére, a két út között érmedobással dönt. Az utakon való végigjutás ideje két valószínűségi változót határoz meg: A-t és B-t.

a) Az A sűrűségfüggvénye (percekben számolva):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 5 \text{ vagy } x > 20, \\ \frac{2}{75}(x-5) & \text{ha } 5 \le x < 10, \\ \frac{1}{75}(20-x) & \text{ha } 10 \le x \le 20. \end{cases}$$

b) A B sűrűségfüggvénye pedig:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 5, \\ \frac{1}{10}\exp\left(-\frac{x-5}{10}\right) & \text{ha } x > 5. \end{cases}$$

Pistike 6-kor indul útnak, mert elfelejtette nézni az órát. Mi a valószínűsége, hogy találkoznak, ha Juliska nem egy türelmes természet, és maximum tíz percet hajlandó várni?

6.18 Egy l hosszúságú ropit találomra választott pontban kettétörünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebb eloszlásfüggvénye?

6.19 Válasszunk két pontot függetlenül és egyenletesen az egységkör kerületén. Határozzuk meg a távolságuk eloszlásfüggvényét.

6.20 Válasszunk a háromdimenziós egységgömb belsejében egy pontot egyenletes eloszlással, és jelölje ξ ennek a pontnak távolságát a gömb középpontjától. Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét és várható értékét.

6.21 Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.