FELTÉTELES VÁRHATÓ ÉRTÉK TORONYSZABÁLYA:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X \mid Y)\right)$$

FELTÉTELES SZÓRÁSNÉGYZET FORMULA:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(\mathrm{Var}(X \mid Y)\right) + \mathrm{Var}\left(\mathbb{E}(X \mid Y)\right)$$

$\boxed{11.2}$ $Y \sim \mathrm{UNI}\{1,2,3,4,5,6\}$ (DOBÓKOCKA)

$$f_{X \mid Y}(x \mid Y = i) = \frac{1}{i} \cdot \mathbb{1}[0 < x < i]$$

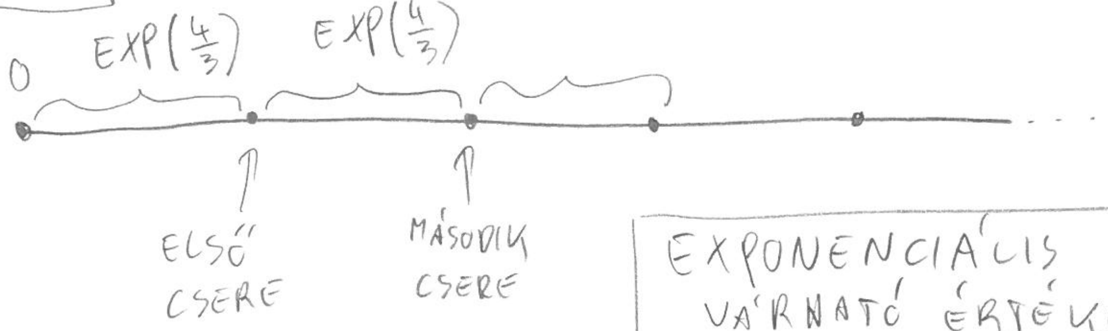
$\mathbb{E}(X \mid Y = i) = \frac{i}{2}$ (HISZEN A $(0,i)$-N EGYENLETES)

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \frac{Y}{2}, \quad \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

$\mathrm{Var}(X \mid Y = i) = \frac{i^2}{12}$ (HISZ A $(0,i)$-N EGYENLETES)

$$\mathrm{Var}(X) = \underbrace{\mathbb{E}\left(\frac{Y^2}{12}\right)}_{= \frac{1}{12} \cdot \underbrace{\frac{1^2+2^2+\dots+6^2}{6}}_{\frac{91}{6}}} + \underbrace{\mathrm{Var}\left(\frac{Y}{2}\right)}_{= \frac{1}{4} \cdot \underbrace{\mathrm{Var}(Y)}_{= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2}}$$

$\boxed{11.3}$ MÉRTÉKEGYSÉGÜNK: ÉV



$\boxed{\text{EXPONENCIÁLIS ELOSZLÁS VÁRHATÓ ÉRTÉKE = PARAMÉTER RECIPROKA}}$

9 HÓNAP $= \frac{3}{4}$ ÉV

ÍGY A CSERÉK KÖZT ELTELT IDŐ $EXP\left(\frac{4}{3}\right)$ ELOSZLÁSÚ.

TEHÁT A CSERÉK IDŐPONTJAI EGY $\frac{4}{3}$ INTENZITÁSÚ POISSON FOLYAMATOT ALKOTNAK.

ÍGY HA t IDEIG HASZNÁLOM AZ AUTÓT, AKKOR $Y \sim POI\left(\frac{4}{3}\cdot t\right)$ AKKU-CSERE LESZ.

$T \sim UNI[0,9]$ IDEIG HASZNÁLOM AZ AUTÓT.

$\mathbb{E}(Y \mid T=t) = \frac{4}{3}\cdot t$ (EZ A $POI\left(\frac{4}{3}t\right)$ VÁRHATÓ ÉRTÉKE)

$$\mathbb{E}(Y \mid T) = \frac{4}{3}T, \quad \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{4}{3}T\right) = \frac{4}{3}\mathbb{E}(T) = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2}$$

$Var(Y \mid T=t) = \frac{4}{3}\cdot t$ (EZ A $POI\left(\frac{4}{3}t\right)$ SZÓRÁSNÉGYZETE)

$$Var(Y) = \underbrace{\mathbb{E}(Var(Y \mid T))}_{\mathbb{E}\left(\frac{4}{3}T\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{2}} + \underbrace{Var\left(\frac{4}{3}T\right)}_{=\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot \overbrace{Var(T)}^{=\frac{9^2}{12}}}$$

TÖBBDIMENZIÓS SŰRŰSÉGFV. - TRAFÓ:

HA $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \underline{\Psi}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ $\left(\begin{matrix} \text{AZAZ } X = \Psi_1(U,V) \\ Y = \Psi_2(U,V) \end{matrix}\right)$

ÉS (U,V) EGYÜTTES SŰ.FV.-E: $f(u,v)$, AKKOR

(X,Y) EGYÜTTES SŰ.FV.-E:

$$g(x,y) = \sum_{\substack{(u,v)\in \\ \Psi^{-1}(x,y)}} f(u,v)\cdot \frac{1}{|\underline{\underline{J}}(u,v)|}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \underline{\Psi}^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}}$$

$\underline{\underline{J}}(u,v)$ JELÖLI A $\underline{\Psi}$ LEKÉPEZÉS JACOBI-MÁTRIXÁT AZ (u,v) HELYEN: $\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{vmatrix} \partial_u \Psi_1(u,v) & \partial_v \Psi_1(u,v) \\ \partial_u \Psi_2(u,v) & \partial_v \Psi_2(u,v) \end{vmatrix}$

ÉS $|\underline{\underline{J}}(u,v)|$ JELÖLI A $\underline{\underline{J}}$ DETERMINÁNSÁNAK AZ ABSZOLÚTÉRTÉKÉT.

11.4(b) X, Y FÜGGETLEN, AZONOS ELOSZLÁSÚ (F.A.E.) $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$

TEHÁT (X,Y) EGYÜTTES SŰ.FV.-E:

$$g(x,y) = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}\right)}_{f_X(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-y^2/2}\right)}_{f_Y(y)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)}$$

(U_1, U_2) EGYÜTTES SŰ.FV.-E: $f(u,v) = \mathbb{1}[0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1]$

$$x = \Psi_1(u,v) = \sqrt{-2\ln(u)} \cdot \cos(2\pi v)$$

$$y = \Psi_2(u,v) = \sqrt{-2\ln(u)} \cdot \sin(2\pi v)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\Psi}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}$$

POLÁR: $\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{-2\ln(u)}}$ $\boxed{\varphi = \arg(x+i\cdot y)}$

(TEHÁT $2\pi \cdot U_2$ AZ (X, Y) SÍKBELI PONT <u>SZÖGE</u>
$\sqrt{-2\ln(U_1)}$ AZ (X, Y) SÍKBELI PONT <u>HOSSZA</u>)

<u>HOSSZ</u> ÉS <u>SZÖG</u> FÜGGETLENEK, HISZ U_1 ÉS U_2 IS AZ.

$$\boxed{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underline{\Psi}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$u = \Psi_1^{-1}(x,y) = e^{-\frac{1}{2}\cdot r^2} = \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$$

$$v = \Psi_2^{-1}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \arg(x+i\cdot y)$$

$$\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{-2\ln(u)} \cdot u} \cdot \cos(2\pi v) & \sqrt{-2\ln(u)} \cdot 2\pi \cdot (-\sin(2\pi v)) \\ \frac{-1}{\sqrt{-2\ln(u)} \cdot u} \cdot \sin(2\pi v) & \sqrt{-2\cdot\ln(u)} \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi v) \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{J}}(u,v)) = \frac{-2\pi}{u} \cdot \cos^2(2\pi v) - \frac{-2\pi}{u} \cdot (-\sin^2(2\pi v)) = \frac{-2\pi}{u}$$

$$\text{ÍGY } g(x,y) = \sum_{\substack{(u,v) \in \\ \underline{\Psi}^{-1}(x,y)}} \underbrace{f(u,v)}_{1} \cdot \frac{1}{|\underline{\underline{J}}(u,v)|} \overset{\underline{\Psi} \text{ INJEKTÍV}}{=}$$

$$= \frac{1}{|\underline{\underline{J}}(\underbrace{\Psi_1^{-1}(x,y)}_{u}, \underbrace{\Psi_2^{-1}(x,y)}_{v})|} = \frac{\Psi_1^{-1}(x,y)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$\boxed{11.7}$ $\underline{X}$ SŰRŰSÉG FÜGGVÉNYE:

$$\underbrace{f(x_1,x_2,x_3)}_{\underline{X}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_1^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_2^2/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_3^2/2} = (2\pi)^{-3/2}\cdot e^{-\frac{\|\underline{X}\|^2}{2}}$$

b) LÁTSZIK, HOGY $f(\underline{X})$ AZ CSAK $\underline{X}$ HOSSZÁTÓL FÜGG, ÍGY HA $\|\underline{X}\|=\|\underline{X}'\|$, AKKOR $f(\underline{X})=f(\underline{X}')$, TEHÁT $\underline{X}$ FELTÉTELES ELOSZLÁSA AZ $\|\underline{X}\|=r$ FELTÉTEL MELLETT EGYENLETES AZ r SUGARÚ GÖMB FELÜLETÉN, TETSZŐLEGES r ESETÉN. TEHÁT (ξ_1,ξ_2,ξ_3) ELOSZLÁSA NEM FÜGG $\|\underline{X}\|$ ÉRTÉKÉTŐL. TEHÁT (ξ_1,ξ_2,ξ_3) EGYENLETES AZ EGYSÉGGÖMBÖN ÉS (ξ_1,ξ_2,ξ_3) FÜGGETLEN ϱ-TÓL. ✓

---

a) LEGYEN $g(r)$ A ϱ VA. VÁ. SŰ. FV.-E, AZAZ

$$g(r)\,dr = \mathbb{P}(\varrho\in[r,r+dr]) = \mathbb{P}(\|\underline{X}\|\in[r,r+dr]) =$$

$$\iiint_{S(r,dr)} f(\underline{x})\,d\underline{x} \approx \iiint_{S(r,dr)} (2\pi)^{-3/2}\cdot e^{-r^2/2}\,d\underline{x} = (2\pi)^{-3/2}\cdot e^{-r^2/2}\cdot \underbrace{|S(r,dr)|}_{\text{TÉRFOGATA}}$$

$$\overbrace{S(r,dr)} \quad \underbrace{B(r+dr)\setminus B(r)}_{\text{TÉRFOGATA}:\ \underbrace{4\pi\cdot r^2}_{\boxed{r \text{ SUGARÚ GÖMB FELÜLETE}}}\cdot\underbrace{dr}_{\text{VASTAGSÁGA}}}$$

TEHÁT:

$$\boxed{g(r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot r^2\cdot e^{-r^2/2}}$$

$\boxed{11.10}$ $Z_1 := Y/2$, TEHÁT (X, Z_1) F.A.E. $N(0,1)$

(b) $\mathbb{P}(0 \le X \le 2,\ -2 \le Y \le 2) \overset{\text{FÜGGETLENEK}}{=}$

$$\underbrace{\mathbb{P}(0 \le X \le 2)}_{\Phi(2)-\Phi(0)} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(-1 \le Z_1 \le 1)}_{\Phi(1)-\Phi(-1)} = 0.3257$$

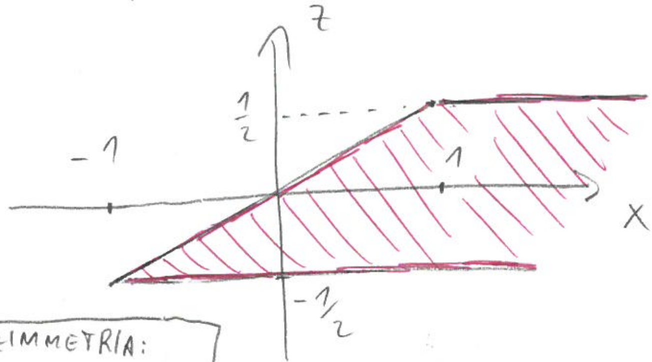
$\boxed{11.10}$ (d) $\mathbb{P}(Y \le X,\ |Y| \le 1,\ X \ge -3) =$

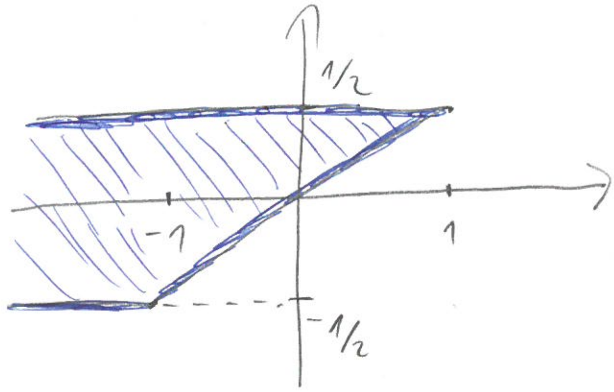
HISZ: $-1 \le Y \le X \Rightarrow -3 \le X$

$\mathbb{P}(Y \le X,\ -1 \le Y \le 1) =$

$\mathbb{P}\left(Z_1 \le \frac{X}{2},\ -\frac{1}{2} \le Z_1 \le \frac{1}{2}\right) =$

$= \mathbb{P}((X, Z_1) \in$ PIROS TARTOMÁNY$) = ✪$





SZIMMETRIA: $(X, Z_1) \sim (-X, -Z_1)$

$✪ = \mathbb{P}((X, Z_1) \in$ KÉK TARTOMÁNY$) =$

$\frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}((X, Z_1) \in$ PIROS $\uplus$ KÉK$) =$

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \le Z_1 \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$\boxed{11.11}$ ELŐADÁSRÓL TUDJUK, HOGY

X, Y F.A.E. $\mathcal{N}(0,4)$, $\underline{X}^* := \left(\frac{X}{2}, \frac{Y}{2}\right)$ $\boxed{11.4\,(b)}$

(a) $\mathbb{P}\left(2 \le \sqrt{X^2+Y^2} \le 3\right) = \mathbb{P}\left(1 \le \|\underline{X}^*\| \le \frac{3}{2}\right) =$

$\mathbb{P}\left(1 \le \sqrt{-2\cdot \ln(U_1)} \le \frac{3}{2}\right) = \mathbb{P}\left(1 \le -2\ln(U_1) \le \frac{9}{4}\right) =$

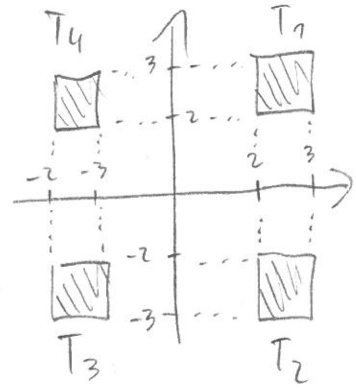
$= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \ge \ln(U_1) \ge -\frac{9}{8}\right) = \mathbb{P}\left(U_1 \in [e^{-9/8}, e^{-1/2}]\right) =$

$e^{-1/2} - e^{-9/8} \approx 0.282$

HISZ $U_1 \sim \mathrm{UNI}[0,1]$

(b) $\mathbb{P}\left(2 \le |X| \wedge |Y|,\ |X| \vee |Y| \le 3\right) =$

$\mathbb{P}\left((X,Y) \in T_1 \uplus T_2 \uplus T_3 \uplus T_4\right)$



SZIMM

$\stackrel{\text{SZIMM}}{=} 4\cdot \mathbb{P}\left((X,Y)\in T_1\right) = 4\cdot\left(\Phi\left(\frac{3}{2}\right) - \Phi(1)\right)^2$

$\boxed{11.14}$ $X_i \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $1 \le i \le k$

$Y_j \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, $1 \le j \le l$

$X = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i$, $X \sim \mathcal{N}\left(\frac{k\cdot\mu}{k}, \frac{k\cdot\sigma^2}{k^2}\right) \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{k}\right)$

$Y = \frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l} Y_j$, $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{l}\right)$

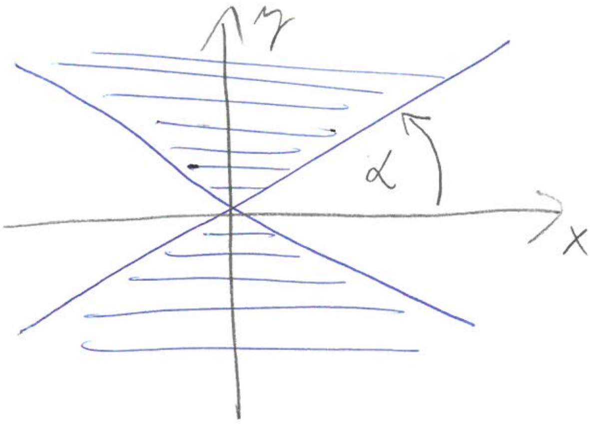
$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \le |Y-\mu|\right) = ?$

$$X^* := \frac{X - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{r}, \quad Y^* := \frac{Y - \mu}{\sigma} \cdot \sqrt{\ell}$$

X^*, Y^* F.A.E. $\mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \le |Y - \mu| \right) = \mathbb{P}\left(\frac{|X^*|}{\sqrt{r}} \le \frac{|Y^*|}{\sqrt{\ell}} \right) =$$

$$\mathbb{P}\left((X^*, Y^*) \in \text{KÉK} \right) = ⊛$$



AHOL A KÉK EGYENESEK MEREDEKSÉGE $\pm\sqrt{\frac{\ell}{r}}$

LEGYEN $\boxed{\alpha = \arctan\left(\sqrt{\frac{\ell}{r}}\right)}$

$\boxed{11.4(b)} \Rightarrow \boxed{\arg\left(X^* + i \cdot Y^*\right) \sim \text{UNI}[0, 2\pi]}$

TEHÁT $⊛ = \frac{\text{KEDVEZŐ SZÖGTARTOMÁNY}}{\text{ÖSSZES SZÖGTARTOMÁNY}} =$

$$= \frac{(\pi/2 - \alpha) \cdot 4}{2\pi} = 1 - \frac{2\alpha}{\pi}$$