$\boxed{1.7}$ ÍRJUK ÁT VAL. SZÁM. FELADATTÁ:
VÁLASSZUNK EGY LAKOST EGYENLETES ELOSZLÁSSAL A 10^5 LAKOS KÖZÜL!

A LEGYEN AZ AZ ESEMÉNY, HOGY A VÁLASZTOTT LAKOS OLVASSA AZ I-ES ÚJSÁGOT.

$B := \{$OLVASSA A II-ES ÚJSÁGOT$\}$

$C := \{$ -"- -"- III-AS -"- $\}$

$\mathbb{P}(A) :=$ ANNAK A VALÓSZÍNŰSÉGE, HOGY AZ A ESEMÉNY BEKÖVETKEZIK.

$\mathbb{P}(A) = 0.26$ (LÁSD FELADATSOR)

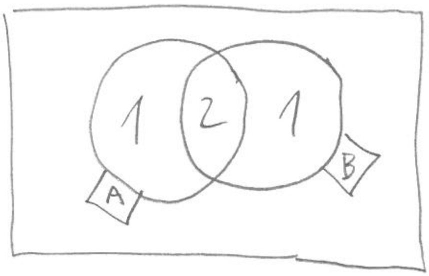
$A \cap B := \{$OLVASSA AZ I-ES ÉS II-ES ÚJS.$\}$
= MIND AZ A, MIND A B ESEMÉNY BEKÖVETKEZIK.

$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.06$ (LÁSD FELADATSOR)

$A \cup B := \{$OLVASSA AZ I-ES VAGY A II-ES ÚJS.$\}$
= AZ A ÉS B ESEMÉNYEK KÖZÜL LEGALÁBB AZ EGYIK BEKÖV.

$\mathbb{P}(A \cup B) = ?$

$$\boxed{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)} \longleftrightarrow$$

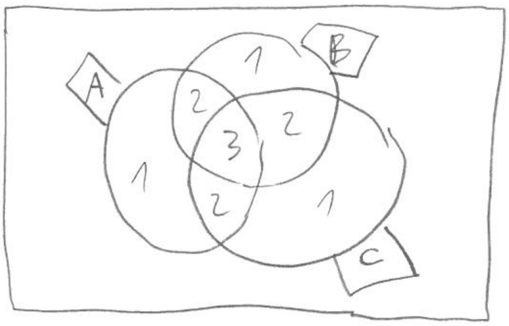


DUPLÁN SZÁMOLTUK AZ $A\cap B$ - BELI LAKOSOKAT!

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)=0.26+0.18-0.06$$

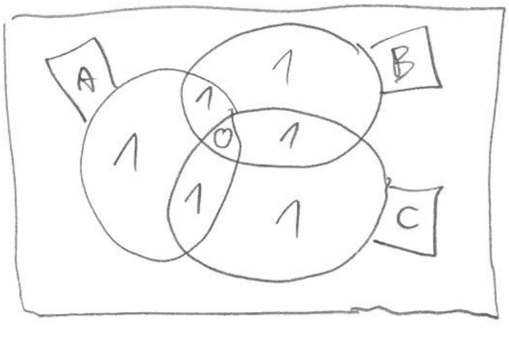
$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=?$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)} \longleftrightarrow$$



MEGINT LE KELL VONNI AZOKAT, AKIKET TÖBBSZÖR SZÁMOLTUNK:

$$\boxed{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)}$$



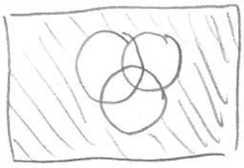
AZ $A\cap B\cap C$ - BELIEKET TÚL SOKSZOR VONTUK LE

$$\mathbb{P}(A\cup B\cup C)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

$$=0.26+0.18+0.22-0.06-0.09-0.05+0.02$$

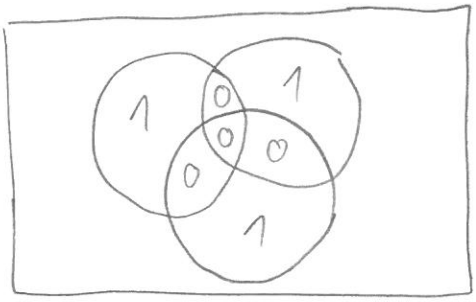
2. OLDAL

a) $(A\cup B\cup C)^c$ = $A\cup B\cup C$ ESEMÉNY KOMPLEMENTERE = A LAKOS NEM OLVASSA AZ I, II, III ÚJSÁG EGYIKÉT SEM

$\mathbb{P}\left((A\cup B\cup C)^c\right) =$  $= 1-\mathbb{P}(A\cup B\cup C)$

---

b) {PONTOSAN EGY ÚJSÁGOT OLVAS} $=: D$



$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)+$$
$$-2\cdot\mathbb{P}(A\cap B)-2\cdot\mathbb{P}(A\cap C)-2\cdot\mathbb{P}(B\cap C)$$
$$+3\cdot\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$$

$\boxed{1.14}$ a) $A_i :=$ {A VÁLASZTOTT CS.-BAN i GYER. VAN}

$\mathbb{P}(A_1)=\frac{5}{20}$, $\mathbb{P}(A_2)=\frac{7}{20}$, $\ldots$, $\mathbb{P}(A_5)=\frac{1}{20}$

b) $B_i :=$ {A VÁLASZTOTT GY. i-GYEREKES CS.-BŐL JÖTT}

ÖSSZESEN GYEREK $5\cdot1+7\cdot2+4\cdot3+3\cdot4+1\cdot5=48$

$\mathbb{P}^*(B_1)=\frac{5\cdot1}{48}$, $\mathbb{P}^*(B_2)=\frac{7\cdot2}{48}$, $\ldots$, $\mathbb{P}^*(B_5)=\frac{1\cdot5}{48}$

„SIZE-BIASED SAMPLING"

$\boxed{1.15}$ HÁNYFÉLEKÉPP LEHET 18 ŐZBŐL NÉGYET BEFOGNI? $\binom{18}{4} = \frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{4!}$

HÁNYFÉLEKÉPP LEHET 18 ŐZBŐL ÚGY 4-ET BEFOGNI, HOGY 2 JELÖLT, 2 NEM? $\binom{5}{2}\cdot\binom{13}{2}$

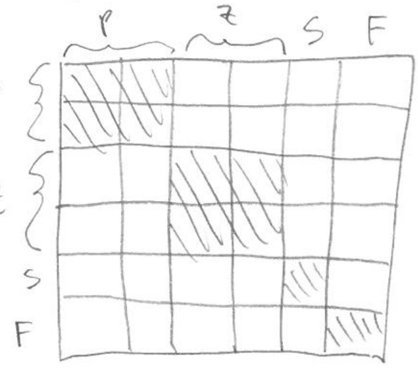
(5 JELÖLTBŐL KETTŐT, 13 JELÖLETLENBŐL KETTŐT)

TEHÁT A KERESETT VALÓSZÍNŰSÉG: $\dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{13}{2}}{\binom{18}{4}}$

$\boxed{1.25}$ $A_i := \{$ i-EDIK FELDOBÁSKOR AZONOS SZÍNŰ $\}$

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3)$

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2^2+2^2+1^2+1^2}{6^2} = \frac{10}{36}$



$\mathbb{P}((A_1)^c \cap (A_2)^c \cap A_3) =$

$= \frac{(36-10)\cdot(36-10)\cdot 10}{6^6} = \frac{26}{36}\cdot\frac{26}{36}\cdot\frac{10}{36} =$

$= (1-\mathbb{P}(A_1))\cdot(1-\mathbb{P}(A_2))\cdot\mathbb{P}(A_3)$

$\boxed{1.4}$ ÍRJUK ÁT VAL. SZÁM. FELADATTÁ!

ÖSSZES ESET SZÁMA: $\binom{8}{4} \cdot \underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{BIZOTTSÁG}}$

a) $A = \{$JÓZSI ÉS BÉLA IS BENNE VAN A BIZOTTSÁGBAN$\}$

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{8}{4} \cdot \binom{7}{3}}$$

ANNAK A VALÓSZÍNŰSÉGE, HOGY OLYAN BIZOTTSÁGOT SORSOLUNK, AMIBEN NEM KERÜL ÖSSZE A KÉT FÉRFI, AKIK NEM HAJLANDÓAK EGYÜTT DOLGOZNI.

$\boxed{1.18}$ $A_i := \{$PONTOSAN i SZERELŐ KAP HÍVÁST$\}$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{4^4}, \quad \mathbb{P}(A_4) = \frac{4!}{4^4}$$

$$\mathbb{P}(A_3) \cdot 4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3$$

KIVÁLASZTOM, HOGY KI HÍVJA AZT, AKIT EGY HÍV ÉS KÉSŐBB VAN AZ ABC-BEN

KIVÁLASZTOM, HOGY KI NEM KAP HÍVÁST

KIVÁLASZTOM, HOGY KI HÍVJA AZT, AKIT EGY HÍV ÉS ELŐBB VAN AZ ABC-BEN

KIVÁLASZTOM, HOGY A TÖBBI KÖZÜL KI KAP KÉT HÍVÁST

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D)$

$C = \{$ KÉT SZERELŐ KAP 2-2 HÍVÁST $\}$

$D = \{$ EGY SZERELŐ KAP 3 HÍVÁST, EGY 1-ET $\}$

$\mathbb{P}(C) \cdot 4^4 = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}$

$\mathbb{P}(D) \cdot 4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 4$

ELLENŐRZÉS:

$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) =$

$= \dfrac{(4 + 84 + 144 + 24)}{4^4} = 1$

$\boxed{1.1}$ HA MEGKÜLÖNBÖZTETHETŐ KÁRTYÁKRA ÍROM A BETŰKET, AKKOR:

MISSISSIPPI : 11 BETŰ : $\begin{cases} 1:M \\ 4:S \\ 4:I \\ 2:P \end{cases}$

11! - FÉLE KÁRTYA-SORREND, DE A KIÍRT SZÓ SZEMPONTJÁBÓL NEM SZÁMÍT AZ UGYANOLYAN BETŰT TARTALMAZÓ KÁRTYÁK EGYMÁS KÖZTI SORRENDJE, ÍGY

$\dfrac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}$ - FÉLE SZÓ.

MEGKEVERVE ÉS KIRAKVA EZT A 11 KÁRTYÁT:

$\mathbb{P}(\text{MISSISSIPPI}) = \dfrac{1!\,4!\,4!\,2!}{11!}$

1.8 a) ÖTLET: HA $\mathbb{P}(A\cap B) < 0.4$ LENNE, AKKOR $\mathbb{P}(A\cup B) > 1$ LENNE:

$$\mathbb{P}(A\cup B) = \underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\geq 0.8} + \underbrace{\mathbb{P}(B)}_{\geq 0.6} - \underbrace{\mathbb{P}(A\cap B)}_{< 0.4} > 0.8+0.6-0.4 = 1$$

ELLENTMONDÁS

---

b) LEGYEN $B_i := A_i^c$

DE MORGAN: $A_1\cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = (B_1\cup\ldots\cup B_n)^c$

TEHÁT:

$$\underbrace{\mathbb{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n)}_{=\,1-\mathbb{P}(B_1\cup\ldots\cup B_n)} \overset{\text{KELL}}{\geq} \underbrace{\mathbb{P}(A_1)}_{=\,1-\mathbb{P}(B_1)} + \ldots + \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{=\,1-\mathbb{P}(B_n)} - (n-1)$$

$$1-\mathbb{P}(B_1\cup\ldots\cup B_n) \overset{\text{KELL}}{\geq} 1-\mathbb{P}(B_1) + \ldots + 1-\mathbb{P}(B_n) - (n-1)$$

$$\mathbb{P}(B_1\cup\ldots\cup B_n) \overset{\text{KELL}}{\leq} \mathbb{P}(B_1)+\ldots+\mathbb{P}(B_n)$$

ÉS EZ IGAZ! { SZUBADDITIVITÁS „UNION BOUND"

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}{}^{*}\, B_i \setminus (B_1\cup\ldots\cup B_{i-1})\right) \overset{\text{DISZJUNKT ÚNIÓ}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i\setminus(B_1\cup\ldots\cup B_{i-1})) \leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B_i)$$

BŐVEBB ESEMÉNY VAL.SÉGE NAGYOBB

$\boxed{1.13}$ $\underbrace{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A}$

13-FÉLE ÉRTÉK: $i = 1, \ldots, 13$

$A_i := \{$ É-NAK AZ i-EDIK ÉRTÉKBŐL MEGVAN MIND A NÉGY $\}$

KÉRDÉS: $\mathbb{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_{13}^c) = ?$

$$\mathbb{P}((A_1 \cup \ldots \cup A_{13})^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{13})$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_{13}) \overset{\text{SZITA}}{=} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [13]} (-1)^{|I|+1} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = ☆$$

HA $|I| = 1$, AKKOR $\underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)} = \dfrac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}}$

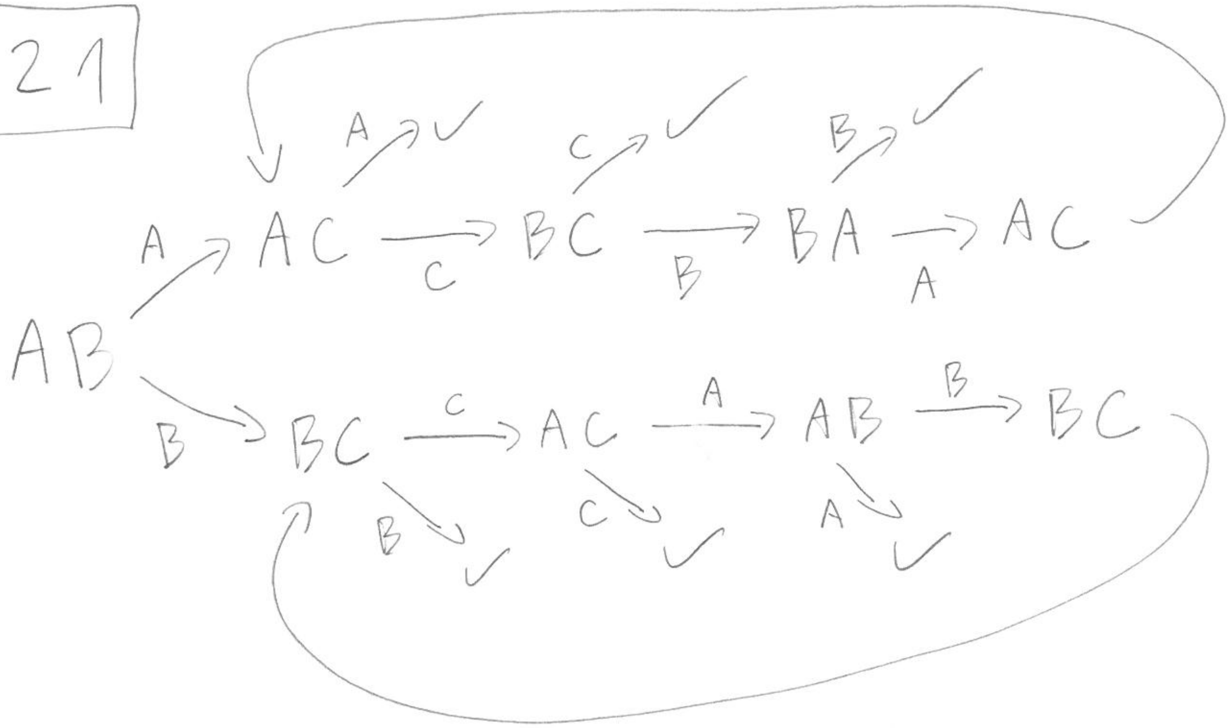
HA $|I| = 2$, AKKOR $\underbrace{-\,''\,-} = \dfrac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}}$

HA $|I| = 3$, AKKOR $\underbrace{-\,''\,-} = \dfrac{\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}$

HA $|I| \geq 4$, AKKOR $-\,''\,- = 0$

$$☆ = \binom{13}{1} \cdot \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} - \binom{13}{2} \cdot \frac{\binom{44}{5}}{\binom{52}{13}} + \binom{13}{3} \cdot \frac{\binom{40}{1}}{\binom{52}{13}}$$

1.21



$\tilde{C} := \{$ CILI NYERI A KÖRMÉRKŐZÉST $\}$

$E_A := \{$ ELSŐ KÖRT A NYERI $\}$

$E_B := \{$ -"- -"- B NYERI $\}$

$$\mathbb{P}(\tilde{C} \cap E_A) =$$

$$= \mathbb{P}(ACC) + \mathbb{P}(ACBACC) + \mathbb{P}(ACBACBACC) + \dots$$

$$= 2^{-3} + 2^{-6} + 2^{-9} + \dots$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^r = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

SZIMMETRIA: $\mathbb{P}(\tilde{C} \cap E_B) = \frac{1}{7}$

$$\mathbb{P}(\tilde{C}) = \mathbb{P}(\tilde{C} \cap E_A) + \mathbb{P}(\tilde{C} \cap E_B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

$\tilde{B} := \{$ BORI NYERI A KÖRMÉRKŐZÉST $\}$

$\tilde{A} := \{$ ANNA —"— —"— $\}$

SZIMMETRIA: $\mathbb{P}(\tilde{A}) = \mathbb{P}(\tilde{B})$

$\mathbb{P}(\tilde{A}) + \mathbb{P}(\tilde{B}) + \underbrace{\mathbb{P}(\tilde{C})}_{\frac{2}{7}} = 1$ (EGY NYERTES)

TEHÁT: $\mathbb{P}(\tilde{A}) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{7}\right) = \frac{5}{14}$

MEGJ.: EZT ILLETT VOLNA BIZONYÍTANI. MÁS MODELLBEN ELŐFORDULHATOTT VOLNA, HOGY ANNAK IS POZITÍV A VALÓSZÍNŰSÉGE, HOGY SOHA NEM ÉR VÉGET A KÖRMÉRKŐZÉS.

VISZONT MOST:

$D_k := \{$ k MECCSBŐL ÁLLT A KÖRMÉRK. $\}$

$\mathbb{P}($VÉGES SOK MECCSBŐL ÁLLT$) =$

$\mathbb{P}\left(\overset{\infty}{\underset{k=2}{\overset{*}{\bigcup}}} D_k\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}(D_k) = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{1-k} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 1$ ✓

$\boxed{1.12}$ a) ESEMÉNYTÉR:

$$\Omega = \{ (X_1, X_2, \dots, X_6) : X_i = 1,2,3,4,5,6 \ , \ i = 1, \dots, 6 \}$$

$$X_i = \boxed{\text{i-EDIK DOBÁS ÉRTÉKE}}$$

$$|\Omega| = 6^6$$

$$A = \{ 1,2,\dots,6 \text{ MIND ELŐFORDUL} \} =$$

$$\{ X_1, X_2, \dots, X_6 \text{ CSUPA KÜLÖNBÖZŐ} \}$$

$$|A| = 6! \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6!}{6^6}$$

$\boxed{1.12}$ b) SZITA FORMULÁVAL OLDJUK MEG

$$\Omega = \{ (X_1, \dots, X_{10}) : X_i = 1, \dots, 6 \ , \ i = 1, \dots, 10 \}$$

$$B := \{ 1,2,\dots,6 \text{ MIND ELŐFORDUL} \} \quad \mathbb{P}(B) = ?$$

$$C_i := \{ i \text{ NEM FORDUL ELŐ} \} \ , \ i = 1,2,\dots,6$$

$$B^c = \bigcup_{i=1}^{6} C_i \qquad \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) \ , \ \text{ÍGY } \mathbb{P}(B^c) = ?$$

$$\text{SZITA: } \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{6} C_i \Big) = \sum_{\substack{H \subseteq \{1,\dots,6\} \\ H \neq \emptyset}} (-1)^{|H|+1} \cdot \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in H} C_i \Big) = \bigstar$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in H} C_i \Big) = \frac{(6-|H|)^{10}}{6^{10}} \ , \ \text{HA } |H| \leq 6 \ , \text{ EGYÉBKÉNT } 0.$$

$$\bigstar = \binom{6}{1} \cdot \frac{5^{10}}{6^{10}} - \binom{6}{2} \cdot \frac{4^{10}}{6^{10}} + \binom{6}{3} \cdot \frac{3^{10}}{6^{10}} - \binom{6}{4} \cdot \frac{2^{10}}{6^{10}} + \binom{6}{5} \cdot \frac{1^{10}}{6^{10}}$$

(HISZ $\binom{6}{i}$-FÉLE OLYAN $H \subseteq \{1,\dots,6\}$ VAN, AMIRE $|H| = i$)

$\boxed{1.20}$ $\mathbb{P}$(MINDHÁROM SZÍNŰT HÚZUNK) =

$1-\underbrace{\mathbb{P}(\text{VAN OLYAN SZÍNŰ, AMIT NEM HÚZUNK KI})}$

$\qquad \mathbb{P}(C_P \cup C_F \cup C_K) = \circledast$ SZITA

$C_P = \{$ PIROSAT NEM HÚZUNK KI $\}$,

$C_F = \{$ FEHÉRET —||— —||— —||— $\}$

$C_K = \{$ KÉKET —||— —||— —||— $\}$

$$\circledast = \mathbb{P}(C_P) + \mathbb{P}(C_F) + \mathbb{P}(C_K) - \mathbb{P}(C_P \cap C_F) - \mathbb{P}(C_P \cap C_K) - \mathbb{P}(C_F \cap C_K) + \underbrace{\mathbb{P}(C_P \cap C_F \cap C_K)}_{0}$$

$$\mathbb{P}(C_P) = \frac{\binom{6+7}{5}}{\binom{6+6+7}{5}} = \mathbb{P}(C_F), \quad \mathbb{P}(C_K) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{19}{5}}$$

$$\mathbb{P}(C_P \cap C_K) = \frac{\binom{6}{5}}{\binom{19}{5}} = \mathbb{P}(C_F \cap C_K)$$

$$\mathbb{P}(C_P \cap C_F) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{19}{5}}$$