$\boxed{2.3}$

a) $\mathbb{P}(\text{VAN ZÖLDJE}) =$

$$1 - \mathbb{P}(\text{NINCS ZÖLDJE}) = 1 - \frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}} \approx 0.8$$

b) $A := \{\text{BARÁTOMNAK VAN ZÖLDJE}\}$

$B := \{\text{ÉN 2 PIROSAT, 3 ZÖLDET KAPTAM}\}$

$$\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(B)} =$$

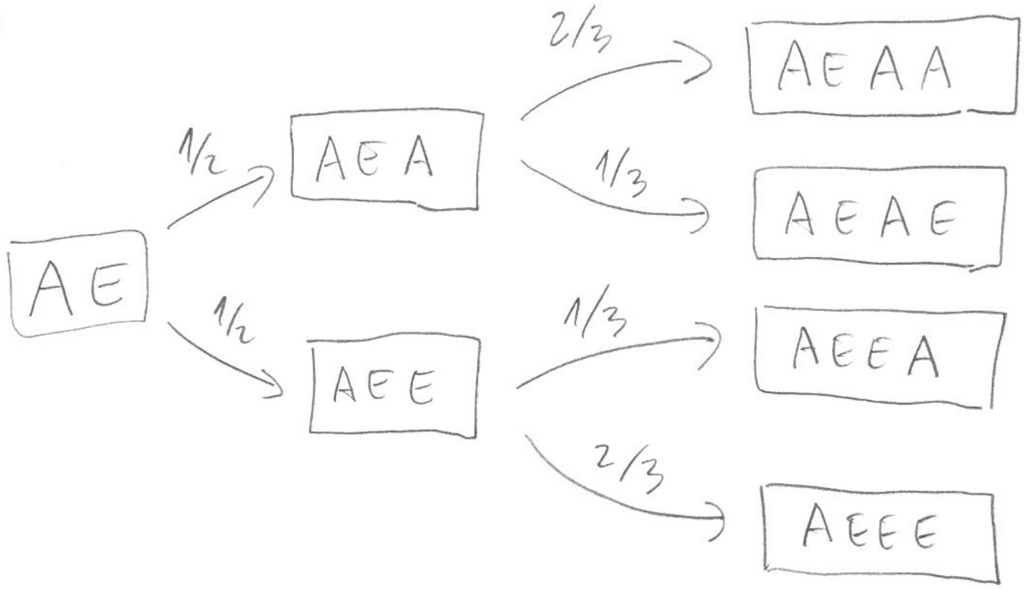
$$= 1 - \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{13}{5} \Big/ \binom{20}{5}\cdot\binom{15}{5}}{\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{3} \Big/ \binom{20}{5}}$$

$$= 1 - \frac{\binom{13}{5}}{\binom{15}{5}} = \frac{4}{7} \approx 0.57$$

<u>SZEMLÉLETESEN</u>: HA B BEKÖVETKEZETT, AKKOR MARADT A BARÁTOMNAK 15 LAP, AMIBŐL 13 NEM ZÖLD.

<u>TANULSÁG</u>: A BARÁTOM LEOSZTÁSA EGYENLETES ELOSZLÁSÚ EGY $\binom{20}{5}$ ELEMŰ HALMAZON, DE FELTÉVE, HOGY BEKÖVETKEZETT A B ESEMÉNY (AMI UTÁN A BARÁTOM LEOSZTÁSAINAK SZÁMA $\binom{15}{5}$ MARAD), A FELTÉTELES ELOSZLÁS IS EGYENLETES LESZ EZEN A $\binom{15}{5}$ ELEMŰ HALMAZON

$\boxed{2.6}$



$A_i := \{$ ÁDÁM KÖRE i FŐBŐL ÁLL, AMIKOR 4 FŐS A KÖZÖSSÉG $\}$

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(AEEE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(AEAE) + \mathbb{P}(AEEA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(AEAA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

<u>MEGJ.</u>: <u>PÓLYA</u> <u>URN</u> <u>MODEL</u> (WIKIPEDIA)

(<u>PL.</u>: BIZ. BE, HOGY HA

$A_{n,i} := \{$ Á KÖRE i FŐBŐL ÁLL, AMIKOR n FŐS A KÖZÖSSÉG $\}$

AKKOR $\mathbb{P}(A_{n,i}) = \frac{1}{n-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$)

2.B $A := \{$ ARMAND SÜTÖTTE A SÜTIT $\}$

$B := \{$ BENOIT —"— —"— $\}$

$C := \{$ CEDRIC —"— —"— $\}$

$R := \{$ ROSSZ A SÜTI $\}$

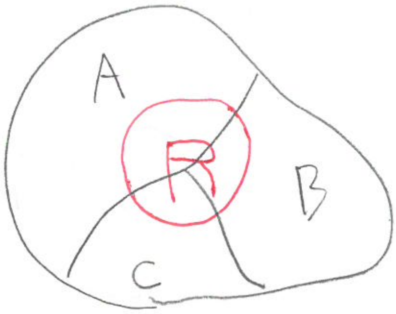
A ROSSZ SÜTIK X SZÁZALÉKÁT SÜTÖTTE A

$$\boxed{X = 100 \cdot \mathbb{P}(A \mid R)} \qquad \mathbb{P}(A \mid R) = \frac{\mathbb{P}(A \cap R)}{\mathbb{P}(R)} = \star$$

TUDJUK: $\mathbb{P}(R \mid A) = 0.02$ $\quad \mathbb{P}(A) = 0.5$

$\mathbb{P}(R \mid B) = 0.03$ $\quad \mathbb{P}(B) = 0.3$

$\mathbb{P}(R \mid C) = 0.05$ $\quad \mathbb{P}(C) = 0.2$



A, B, C TELJES ESEMÉNY-RENDSZERT ALKOT, TEHÁT

$$\mathbb{P}(R) = \underbrace{\mathbb{P}(R \cap A)}_{= \mathbb{P}(R \mid A) \cdot \mathbb{P}(A) = (0.02)\cdot(0.5) = 0.01} + \underbrace{\mathbb{P}(R \cap B)}_{= \mathbb{P}(R \mid B) \cdot \mathbb{P}(B) = (0.03)\cdot(0.3)} + \underbrace{\mathbb{P}(R \cap C)}_{= (0.05)\cdot(0.2)} = 0.029$$

$$\star = \frac{0.01}{0.029} = \frac{10}{29}$$

EZ EGY „BAYES TÉTEL"-ES FELADAT VOLT

$\boxed{2.15}$ $A_{ij} := \{$ i-NEK ÉS j-NEK UGYANAZ A SZÜLINAPJA $\}$

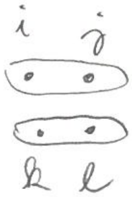
$1 \le i < j \le n$

$B_{i,x} := \{$ i-NEK x-ADIKÁN VAN A SZÜLINAPJA $\}$

$x = 1, 2, \ldots, 365$, $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbb{P}(A_{i,j}) = \sum_{x=1}^{365} \mathbb{P}(B_{i,x} \cap B_{j,x}) \overset{\text{FÜGGETLENSÉG}}{=}$$

$$= \sum_{x=1}^{365} \mathbb{P}(B_{i,x}) \cdot \mathbb{P}(B_{j,x}) = \sum_{x=1}^{365} \frac{1}{365^2} = \frac{1}{365}$$

a)  HA i, j, k, l CSUPA KÜLÖNBÖZŐ, AKKOR

$$\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{k,l}) = \sum_{x,y=1}^{365} \mathbb{P}(B_{i,x} \cap B_{j,x} \cap B_{k,y} \cap B_{l,y}) =$$

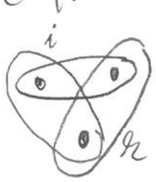
$$= \sum_{x,y=1}^{365} \mathbb{P}(B_{i,x}) \mathbb{P}(B_{j,x}) \cdot \mathbb{P}(B_{k,y}) \cdot \mathbb{P}(B_{l,y}) = 365^2 \cdot \frac{1}{365^4}$$

$$= \frac{1}{365^2} = \mathbb{P}(A_{i,j}) \cdot \mathbb{P}(A_{k,l}),$$ TEHÁT FÜGGETLENEK

 $$\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{i,k}) = \sum_{x=1}^{365} \mathbb{P}(B_{i,x} \cap B_{j,x} \cap B_{k,x}) =$$

$$= 365 \cdot \frac{1}{365^3} = \mathbb{P}(A_{i,j}) \cdot \mathbb{P}(A_{i,k}),$$ FÜGGETLENEK

TEHÁT <u>PÁRONKÉNT</u> <u>FÜGGETLEN</u> AZ $\binom{n}{2}$ ESEMÉNY

b)  $$\mathbb{P}(A_{i,j} \cap A_{i,k} \cap A_{j,k}) =$$

$$= \sum_{x=1}^{365} \mathbb{P}(B_{i,x} \cap B_{j,x} \cap B_{k,x}) = \frac{1}{365^2} \neq \mathbb{P}(A_{i,j}) \cdot \mathbb{P}(A_{i,k}) \cdot \mathbb{P}(A_{j,k})$$

TEHÁT <u>NEM</u> <u>TELJESEN</u> <u>FÜGGETLENEK</u>

$\boxed{2.17}$ $B_n := \{$AZ ELSŐ n VIZSGÁN MEGBUKIK$\}$

$$\mathbb{P}(B_n \mid B_{n-1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \quad \boxed{B_n \subseteq B_{n-1}}$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2 \mid B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(B_3 \mid B_2) \cdot \mathbb{P}(B_2) =$$

$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, <u>STB</u>: TELJES INDUKCIÓVAL

BELÁTHATÓ: $\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{n+1}}$

$E := \{$ELŐBB-UTÓBB ÁTMEGY$\}$

$\boxed{B_n^c \subseteq E}$ $\boxed{\mathbb{P}(B_n^c) \leq \mathbb{P}(E)}$

$$\mathbb{P}(B_n^c) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$1 - \frac{1}{n+1}$, ÉS EZ IGAZ MINDEN

n-RE, ÍGY $\boxed{\mathbb{P}(E) = 1}$: ELŐBB-UTÓB ÁTMEGY ☺

$\boxed{2.20}$ MONDJUK AZ 1. AJTÓT VÁLASZTOTTAM

EREDETILEG.

$A :=$ {„ÁTTÉREK" STRATÉGIÁVAL NYEREK}

$M :=$ {„MARADOK" STRATÉGIÁVAL NYEREK}

VEGYÜK ÉSZRE: $\boxed{A^c = M}$, ÍGY $\boxed{\mathbb{P}(M) = 1 - \mathbb{P}(A)}$

$B_i :=$ {i-EDIK AJTÓ MÖGÖTT VAN AZ AUTÓ}

$\mathbb{P}(B_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$

$\boxed{A = B_2 \cup B_3}$, HISZEN PL. B_2 ESETÉN A 3. AJTÓT NYITJÁK KI, ÍGY HA ÁT-TÉREK, AKKOR A MÁSODIK (AZAZ A NYERŐ) AJTÓT VÁLASZTOM.

TEHÁT $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(M) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

<u>ÉRDEMES</u> <u>ÁTTÉRNI</u> <u>A</u> <u>MÁSIK</u> <u>AJTÓRA</u>!

EZ A HÍRES „<u>MONTY</u> <u>HALL</u> <u>PROBLEM</u>":

(ÉRDEMES ELOLVASNI A WIKIPEDIA-CIKKET KULTÚRTÖRTÉNETI OKOKBÓL)