

3.8  $A := \{ \alpha \text{ KOCKA'T HASZNÁLTUK} \}$

$B := \{ \beta \text{ KOCKA'T HASZNÁLTUK} \}$

$A \cup B = \Omega, A \cap B = \emptyset, P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

$C_k := \{ k\text{-ADIK KOCKADOBÁS EREDMÉNYE PIROS} \}$

$C_1, C_2, \dots, C_n$  ESEMÉNYEK NEM FÜGGETLENEK,  
DE FELTÉTELESEN FÜGGETLENEK, HA MÁR  
TUDJUK AZ ÉRHEDOBÁS EREDMÉNYÉT.

a)  $P(C_k) = \underbrace{P(C_k | A)}_{2/3} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{P(C_k | B)}_{1/3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE

b)  $P(C_k | \bigcap_{i=1}^{k-1} C_i) = \frac{P(C_1 \cap \dots \cap C_k)}{P(C_1 \cap \dots \cap C_{k-1})} =$

$\frac{P(C_1 \cap \dots \cap C_k | A) \cdot \frac{1}{2} + P(C_1 \cap \dots \cap C_k | B) \cdot \frac{1}{2}}{P(C_1 \cap \dots \cap C_{k-1} | A) \cdot \frac{1}{2} + P(C_1 \cap \dots \cap C_{k-1} | B) \cdot \frac{1}{2}}$

$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}} \stackrel{\text{HA } k \text{ NAGY}}{\approx} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$

TEHÁT  $C_1, \dots, C_k$  TÉNYLEG NEM FÜGGETLENEK

$k$  NAGY ÉS  
HA  $k-1$ -SZER PIROS, AKKOR SZINTE BIZTOS, HOGY  
A  $\alpha$  KOCKA'T HASZNÁLTUK, ÉS AKKOR  
2/3 A PIROS VAL.SÉGE. (1. OLDAL)

3.4  $X$  LEHETSÉGES ÉRTÉKEI: 0, 1, 2, 3, 4

KELL:  $P(X=r)$ ,  $r=0, 1, 2, 3, 4$

KÖNNYEBB KISZÁMOLNI ELŐSZÖR:

$P(X \geq r)$  ÉRTÉKÉT  $r=0, 1, 2, 3, 4$ .

$$P(X \geq r) = P(\text{AZ ELSŐ } r \text{ MECCSET ÖNYERI})$$

$$= P(\text{Ő ÉS A } r \text{ MÁSIK JÁTÉKOS KÖZÜL Ő A LEGJOBB})$$

$$= \frac{1}{r+1} \quad \text{HISZEN AZ EZEN } r+1 \text{ JÁTÉKOS KÖZTI}$$

BÁRMELYIK RELATÍV SORREND

HISZEN

$$\{X \geq r+1\} \subseteq \{X \geq r\}$$

UGYANOLYAN VALÓSZÍNŰ.

$$P_r := P(X=r) = P(\{X \geq r\} \setminus \{X \geq r+1\}) =$$

$$= P(X \geq r) - P(X \geq r+1) = \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2} = \frac{1}{(r+1)(r+2)}$$

NA  $r=0, 1, 2, 3$

$$\text{NA } r=4: P(X=4) = P(X \geq 4) = \frac{1}{5}$$

$$E(X) = \sum_{r=0}^4 r \cdot P_r = 0 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} + 1 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} + 2 \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} + 3 \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} + 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

MEGŰ:

$$\sum_{r=1}^4 P(X \geq r) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

ÖSSZEADVA

SORONKÉNT ÖSSZEADVA

$P_1$			
$P_2$	$P_2$		
$P_3$	$P_3$	$P_3$	
$P_4$	$P_4$	$P_4$	$P_4$

2. OLDAL

3.19) 3 KOCKA:

$$Y_i := \begin{cases} 1, & \text{HA AZ } i\text{-EDIK KOCKA DOBÁSSAL NYERTEM} \\ 0, & \text{HA AZ } \dots \dots \dots \text{NEM } \dots \end{cases}$$

$$X := Y_1 + Y_2 + Y_3 \quad \boxed{X \sim \text{BIN} \left( 3, \frac{1}{6} \right)}$$

$$P_k := P(X = k), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$P_k = \binom{3}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}$$

BINOMIÁLIS  
ELOSZLÁSÚ

$$\text{TUDZUK: } E(X) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$E(X) = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3$$

NYEREMÉNYEM:  $Z_1$  PETAÍK

$$Z_1 = \begin{cases} X, & \text{HA } X \geq 1 \\ -1, & \text{HA } X = 0 \end{cases}$$

$$E(Z_1) = -1 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3$$

$$= E(X) - P_0 = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{-17}{216}$$

TEHÁT NEM FAIR EZ A ZÁTÉK

HISZ A VÁRNATÓ NYEREMÉNYEM NEGATÍV

3. OLDAL

3.25

a)  $X :=$  PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA VISSZATEVÉSSEL

$X$  "OPTIMISTA" GEOMETRIAI ELŐSZELÉSŰ

(FÜGGETLEN PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA AZ  
ELSŐ SIKERIG)  $X \sim \text{GEO}(\frac{1}{n})$

EGYSZERI PRÓBÁLKOZÁS SIKERÉNEK VALÓSZÍNŰSÉGE

$$E(X) = \frac{1}{1/n} = n$$

b)  $Y :=$  PRÓBÁLKOZÁSOK SZÁMA VISSZATEVÉS NÉLKÜL

$P(Y = k) = \frac{1}{n}$ ,  $Y$  EGYENLETES ELŐSZELÉSŰ AZ  
 $\{1, 2, \dots, n\}$  HALMAZON

HISZEN BÁRMILYEN KULCS-SORREND UGYANOLYAN  
VALÓSZÍNŰ, ÍGY BÁRMELYIK POZÍCIÓN  
UGYANAKKORA VALÓSZÍNŰSÉGGEL LESZ A ZÓ KULCS.

$$E(Y) = \sum_{k=1}^n k \cdot P(Y = k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \cdot (1 + 2 + \dots + n)$$

$$E(Y) = \frac{n+1}{2}$$

VISSZATEVÉSSEL VÁRHATÓAN KB FELEANNYI  
IDŐ ALATT TÁRÁLOM MEG A ZÓ KULCSOT

4. OLDAL

3.20 A MA MEGHIBA'SODÓ GÉPEK SZÁMA:  $X$

$$X \sim \text{BIN}(n, p)$$

$$P(\text{MA LEÁLL A RENDSZER}) = P(X \geq r) =$$

$$= \sum_{l=r}^n \binom{n}{l} \cdot p^l \cdot (1-p)^{n-l} =: q$$

HA AZ  $Y$ -ADIK NAPON ÁLL LE A RENDSZER,

AKKOR  $Y$  "OPTIMISTA" GEO. ELOSZLÁSÚ

(FÜGGETLEN VÍSZÉRLETEK, SZÁMOK AZ  
ELSŐ "SIKERIG", AHOL "SIKER" = "MEGHIBA'SODÁS")

$$Y \sim \text{GEO}(q)$$

$$P(Y = t) = \underbrace{(1-q)^{t-1}}_{t-1 \text{ NAPON ÁT NINC S MEGHIBA'SODÁS}} \cdot \underbrace{q}_{t\text{-EDIK NAPON VAN MEGHIBA'SODÁS}}$$

$t-1$   
NAPON  
ÁT  
NINC S  
MEGHIBA'SODÁS

$t$ -EDIK NAPON  
VAN MEGHIBA'SODÁS

("PESSZIMISTA" GEO. ELOSZLÁS AZ LENNE,  
HA AZT SZÁMOLNA'NK, HOGY MÁNY KUPARC VOLT  
AZ ELSŐ SIKERIG)

3.14 ELSŐ FORDULÓ:

$$A := \{ \text{ANNA NYER} \}$$

$$B := \{ \text{BORI NYER} \}$$

$$C := \{ \text{ELSŐ FORDULÓ DÖNTETLEN} \}$$

A, B, C TELJES ESEMÉNYRENDSZER.

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad P(B) = \frac{5}{6} \cdot \underbrace{P(\text{LEFALÁBB EGY KATOS})}_{= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}$$

$$P(B) = \frac{55}{216} \quad P(C) = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{216}$$

a)  $X'$  "OPTIMISTA" GEO. ELŐSZELÉSŰ

$$X' \sim \text{GEO}(p), \quad p = 1 - P(C) = \frac{91}{216}$$

$$E(X') = \frac{1}{p} = \frac{216}{91}$$

---

$$b) P(\text{ANNA GYŐZ}) = \sum_{r=1}^{\infty} P(\text{ANNA A } r\text{-ADIK KÖRBEN GYŐZ}) =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} P(C)^{r-1} \cdot P(A) = P(A) \cdot \frac{1}{1 - P(C)} = \frac{36}{91}$$

$$\text{MEGZ: } P(\text{ANNA GYŐZ}) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} =$$

$$= P(A | A \cup B) = \text{ANNAK A VAL. SÉGÉ, NAGY ANNA GYŐZ, FELTÉVE, NAGY AZ ELSŐ KÖRBEN GYŐZ VALAKI}$$

6. OLDAL