$$\mathbb{E}(a\cdot X + b\cdot Y) = a\cdot\mathbb{E}(X) + b\cdot\mathbb{E}(Y), \quad a,b\in\mathbb{R}$$

VÁRHATÓ ÉRTÉK LINEARITÁSA

$$\mathbb{D}^2(X) = \mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}((X-m)^2) = \mathbb{E}(X^2) - m^2$$

(AHOL $m = \mathbb{E}(X)$)

TÉNY: $\mathrm{Var}(a\cdot X + b) = a^2\cdot\mathrm{Var}(X)$ BIZ. BE!

$\boxed{4.9}$ a) $\mathbb{E}((2+X)^2) = \mathbb{E}(4 + 4X + X^2) =$

$$4 + 4\cdot\underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=1} + \mathbb{E}(X^2) = 8 + \underbrace{(\mathbb{E}(X))^2}_{=1^2} + \underbrace{\mathrm{Var}(X)}_{=5} = 14$$

b) $\mathrm{Var}(4+3X) = 3^2\cdot\mathrm{Var}(X) = 9\cdot5 = 45$

A ESEMÉNY INDIKÁTORA AZ $\mathbb{1}[A]$ VA.VÁ.:

$$\mathbb{1}[A] = \begin{cases} 1, & \text{HA A BEKÖVETKEZIK} \\ 0, & \text{HA A NEM KÖV. BE.} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}[A]) = 1\cdot\mathbb{P}(A) + 0\cdot\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A)$$

$\boxed{4.10}$ $N = \sum_{i=1}^{N} 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}[i \le N]$, TEHÁT...

HISZ N NEMNEGATÍV EGÉSZ

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}[i \le N]\right) \overset{\text{VÁRHATÓ ÉRTÉK LINEARITÁSA}}{=\!=}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}[i \le N]\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(i \le N)$$

$\boxed{4.4}$ $A_k := \{ k\text{-ADIK ÉRMEDOBÁS FEJ} \}$, $k = 1, 2, \ldots, 10$

$B_k := A_k \triangle A_{k-1} = \{ k\text{-ADIK ÉS } k-1\text{-EDIK ÉRME KÜLÖNBÖZIK} \}$

SZIMMETRIKUS DIFFERENCIA $\quad 2 \le k \le 10$

$\mathbb{Y} := \sum_{k=2}^{10} \mathbb{1}[B_k] =$ VÁLTÁSOK SZÁMA

EKKOR $\boxed{\mathbb{X} = \mathbb{Y} + 1}$

<u>ÁLLÍTÁS:</u> $\underset{C_1}{\overset{\shortparallel}{A_1}}, \underset{C_2}{\overset{\shortparallel}{B_2}}, \underset{C_3}{\overset{\shortparallel}{B_3}}, \ldots, \underset{C_{10}}{\overset{\shortparallel}{B_{10}}}$ TELJESEN FÜGGETLEN ESEMÉNYEK

<u>BIZ</u>: ELÉG BELÁTNI, HOGY TETSZŐLEGES

$K \subseteq \{1, 2, \ldots, 10\}$ ESETÉN:

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right) \cap \left(\bigcap_{k \notin K} C_k^c\right)\right)}_{= 2^{-10}} = \underbrace{\left(\prod_{k \in K} \mathbb{P}(C_k)\right) \cdot \left(\prod_{k \notin K} \mathbb{P}(C_k^c)\right)}_{= 2^{-10}}$$

HISZ EZ AZ INFO. PONTOSAN DETERMINÁLJA AZ ÉRMEDOBÁS-SOROZATOT ÉS...

HISZ $\mathbb{P}(C_k) = \mathbb{P}(C_k^c) = 1/2$

... ÉS BÁRMELYIK ÉRMEDOBÁS-SOROZAT VALÓSZÍNŰSÉGE 2^{-10}.

TEHÁT $Y \sim BIN\left(9, \frac{1}{2}\right)$, TEHÁT

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k-1) = \binom{9}{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{9-(k-1)}$$

$$= \binom{9}{k-1} \cdot 2^{-10}, \quad \text{AHOL } k = 1, 2, \ldots, 10$$

$\boxed{4.6}$ a) $X :=$ PIROS KOCKA EREDMÉNYE

$Y :=$ ZÖLD KOCKA EREDMÉNYE

$X \vee Y := \max\{X, Y\}$, $X \wedge Y := \min\{X, Y\}$

$$\mathbb{E}(X \wedge Y) \overset{\boxed{4.10}}{=} \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X \wedge Y \geq i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X \geq i, Y \geq i) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X \geq i) \cdot \mathbb{P}(Y \geq i)$$

$$= \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{7-i}{6}\right)^2 = \sum_{j=1}^{6} \left(\frac{j}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \cdot \left(1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2\right) = \frac{91}{36}$$

$\mathbb{E}(X \vee Y) = ?$ $\quad \boxed{X \wedge Y + X \vee Y = X + Y}$, TEHÁT

$$\mathbb{E}(X \vee Y) = \mathbb{E}(X + Y - X \wedge Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \frac{91}{36} =$$

$$= 2 \cdot \mathbb{E}(X) - \frac{91}{36} = 2 \cdot \left(\frac{1+2+\ldots+6}{6}\right) - \frac{91}{36} = 7 - \frac{91}{36} = \frac{161}{36}$$

$\boxed{4.6}$ b) $A_i :=$ { ZÖLD KOCKA i-EDIK DOBÁSA LEGFELJEBB ⚁ }

$$Z_1 := \sum_{i=1}^{3} \mathbb{1}[A_i]$$

KÉRDÉS: $\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = ?$ $\quad Z_1 \sim BIN\left(3, \frac{1}{3}\right)$

$$\mathbb{P}(Z_1 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Z_1 = 0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$\boxed{4.14}$ $A :=$ { 6-SZOR FELDOBVA 3 FEJ, 3 ÍRÁS }

$$\mathbb{P}(A) = \binom{6}{3} \cdot (0.7)^3 \cdot (0,3)^3$$

HA ω EGY KONKRÉT 6 HOSSZÚ FEJ-ÍRÁS-SOROZAT, AMI 3 FEJET, 3 ÍRÁST TARTALMAZ, AKKOR $\mathbb{P}(\omega) = (0.7)^3 \cdot (0.3)^3$, ÍGY

$$\mathbb{P}(\omega \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{20}$$

TEHÁT AZ A FELTÉTEL MELLETTI FELTÉTELES ELOSZLÁS EGYENLETES EZEN A 20 ELEMŰ HALMAZON.

a) $\frac{1}{2}$ (SZIMMETRIA MIATT) b) $\frac{3}{20}$ ← KEDVEZŐ / ← ÖSSZES

c) $\frac{3}{20}$ d) $\frac{1}{20}$

HA $X \sim BIN(n, p)$, AHOL n „NAGY",
VISZONT $n \cdot p$ „SE NEM TÚL NAGY, SE NEM TÚL KICSI", AKKOR „KIS CSALÁSSAL" AZT MONDJUK, HOGY $\boxed{X \sim POI(\lambda)}$, AHOL $\boxed{\lambda = n \cdot p}$
ÉS AKKOR $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

$\boxed{4.16}$ TFH: MINDEN SZELVÉNY $p = 10^{-5}$ VAL.SÉGGEL NYER TELEFONT, A TÖBBI SZELVÉNYTŐL ÉS A TÖBBI HÓNAPBAN TÖRTÉNTEKTŐL FÜGGETLENÜL.

a) $n = 3 \cdot 10^5$ X = KISORSOLT TELEFONOK SZÁMA EGY HÓNAPBAN

$X \sim BIN(n, p)$, $n \gg 1$, $n \cdot p = 3$, TEHÁT KÖZELÍTSÜK: $X \sim POI(3)$

$$\mathbb{P}(X \geq 7) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 6) = \underbrace{1 - e^{-3} \cdot \left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \dots + \frac{3^6}{6!}\right)}_{q \approx 0.033}$$

b) Y := AZON HÓNAPOK SZÁMA, AMIKOR VAN LEGALÁBB 7 NYERŐ SZELVÉNY

$Y \sim BIN(12, q)$ ITT NEM ALK. POI. KÖZELÍTÉST

$$\mathbb{P}(Y \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 1) = 1 - \left((1-q)^{12} + 12 \cdot q \cdot (1-q)^{11}\right)$$

c) Z := AHANYADIK HÓNAPBAN LESZ ELŐSZÖR 7 NYERŐ

$Z \sim GEO(q)$ TEHÁT $\mathbb{P}(Z = i) = q \cdot (1-q)^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

(OPTIMISTA GEOMETRIAI)

$\boxed{4.17}$ $\lambda :=$ SÜTIBEN LEVŐ MAZSOLÁK ÁTLAGOS SZÁMA.

$X :=$ EGY SÜTIBEN LEVŐ MAZSOLÁK SZÁMA

$\boxed{\lambda = \mathbb{E}(X)}$ ÁLL: $X \sim POI(\lambda)$, HISZEN SOK TÉSZTA, SOK MAZSOLA, JÓL ÖSSZE-KEVERVE. MINDEGYIK MAZSOLA A TÖBBITŐL FÜGGETLENÜL KERÜL PONT AZ ÉN SÜTIMBE. TEHÁT: BINOMIÁLIS ELOSZLÁS POISSON KÖZELÍTÉSE ALKALMAZHATÓ.

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\mathbb{P}(X \geq 1)}_{1-\mathbb{P}(X=0) = 1-e^{-\lambda}} = 0.99 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e^{-\lambda} = 0.01 \\ \lambda = \ln(100) \approx 4.6 \end{array}$$

TEHÁT ÁTLAGOSAN 4.6 SZEM MAZSOLA KELL LEGALÁBB

$\boxed{4.22}$ HA $X :=$ EGY VERSENYZŐBEN LEVŐ KULLANCSOK SZÁMA

AKKOR $X \sim POI(\lambda)$ (HISZ SOK KULLANCS PRÓBÁL-KOZIK EGYMÁSTÓL FÜGGETLENÜL, KICSI VALÓ-SZÍNŰSÉGGEL SIKERES EGY KULLANCS)

K VERSENYZŐ INDUL. AZON VERSENYZŐK VÁRHATÓ SZÁMA, AKIKET EGY KULLANCS CSÍPETT: $m_1 = K \cdot \mathbb{P}(X=1) = K \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda$

„NAGY SZÁMOK (BERNOULLI-FÉLE) TÖRVÉNYE"

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$m_1 = K \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda \approx 300$$

HASONLÓAN: $K \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^2}{2} \approx 75$.

TEHÁT $\boxed{\lambda \approx \frac{1}{2}}$ ÉS $K \approx 600 \cdot e^{1/2} \approx 989$

4.13 $p_i := \mathbb{P}(X = i) = \frac{n_i}{m}$, $i = 1, 2, \ldots, r$

$M := \sum_{i=1}^{r} i \cdot n_i$, $q_i := \mathbb{P}(Y = i) = \frac{i \cdot n_i}{M}$

$(p_i)_{i=1}^{r}$ AZ EREDETI ELOSZLÁS,

$(q_i)_{i=1}^{r}$ A „SIZE-BIASED" ELOSZLÁS

$\mathbb{E}(X) = \frac{M}{m}$, TEHÁT $\boxed{q_i = \frac{i \cdot p_i}{\mathbb{E}(X)}}$ KELL

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{r} i \cdot q_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{i^2 \cdot p_i}{\mathbb{E}(X)} = \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\mathbb{E}(X)} \geq \mathbb{E}(X)$$

ÉS VALÓBAN: $\mathbb{E}(X^2) \geq (\mathbb{E}(X))^2$, HISZEN

$$\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathrm{Var}(X) \geq 0$$

TUDJUK