SŰRŰSÉGFÜGGVÉNY – TRANSZFORMÁCIÓ:

HA $\mathfrak{Y} := \Psi(\mathfrak{X})$ ÉS $\mathbb{P}(\mathfrak{X} \in [x, x+dx]) = f(x)dx$

AKKOR $\mathfrak{Y}$ SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYE: $g(y)$:

$$g(y)dy = \mathbb{P}(\mathfrak{Y} \in [y, y+dy]) = \mathbb{P}(\Psi(\mathfrak{X}) \in [y, y+dy])$$

$$= \mathbb{P}(\mathfrak{X} \in \Psi^{-1}([y, y+dy])) \approx$$

$$\approx \sum_{x \in \Psi^{-1}(y)} \mathbb{P}\left(\mathfrak{X} \in \left[x, x + \frac{dy}{|\Psi'(x)|}\right]\right) = \left(\sum_{x \in \Psi^{-1}(y)} f(x) \cdot \frac{1}{|\Psi'(x)|}\right) dy$$

$\boxed{8.1(c)}$ $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$ ξ^2 SŰ.FV.? g

$$\Psi(x) = x^2, \quad \Psi'(x) = 2x, \quad \Psi^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset, & \text{HA } y < 0 \\ \pm\sqrt{y}, & \text{HA } y \geq 0 \end{cases}$$

$g(y) = 0$, HA $y < 0$, ÉS HA $y \geq 0$, AKKOR

$$g(y) = \sum_{x = \pm\sqrt{y}} \varphi(x) \cdot \frac{1}{|2x|} = \varphi(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{|2\sqrt{y}|} +$$

$$\varphi(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{|2 \cdot (-\sqrt{y})|} = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \varphi(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-y/2}$$

HISZ $\varphi(x) = \varphi(-x)$: $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}}$

$\boxed{8.1\,(e)}$ $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\eta = e^{\xi}$ SŰ.FŰ? $g(y)$

$$\Psi(x) = e^{x},\quad \Psi'(x) = e^{x},\quad \Psi^{-1}(y) = \begin{cases} \emptyset, & \text{HA } y \leq 0 \\ \ln(y), & \text{HA } y > 0 \end{cases}$$

$g(y) = 0$, HA $y \leq 1$, HISZ $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$,

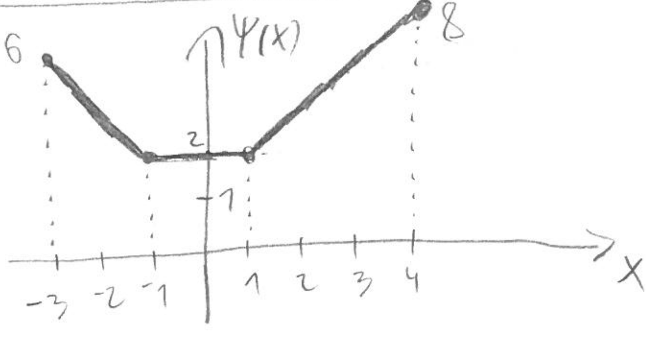
ÍGY $\mathbb{P}(e^{\eta} \geq e^{0}) = 1$. HA $y > 1$, AKKOR:

$$g(y) = \sum_{x \in \ln(y)} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \frac{1}{|e^{x}|} = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot \ln(y)} \cdot \frac{1}{y} =$$

$$= \lambda \cdot y^{-\lambda} \cdot y^{-1} = \lambda \cdot y^{-(\lambda+1)},\quad \text{HA } y > 1.$$

ELLENŐRZÉS: $\int_{1}^{\infty} \lambda \cdot y^{-(\lambda+1)}\, dy = \ldots = 1$ ✓

$\boxed{8.2}$



$\eta = \Psi(\xi)$

$\mathbb{P}(\eta < 2) = 0$

$$\mathbb{P}(\eta = 2) = \mathbb{P}(\xi \in [-1, 1]) = \frac{2}{7}$$

HA $2 < y \leq 6$: $\mathbb{P}(\eta < y) = \mathbb{P}\left(\xi \in \left(-1 - \frac{y-2}{2}, 1 + \frac{y-2}{2}\right)\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\xi \in \left(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2}\right)\right) = \frac{y}{7}$$

2. OLDAL

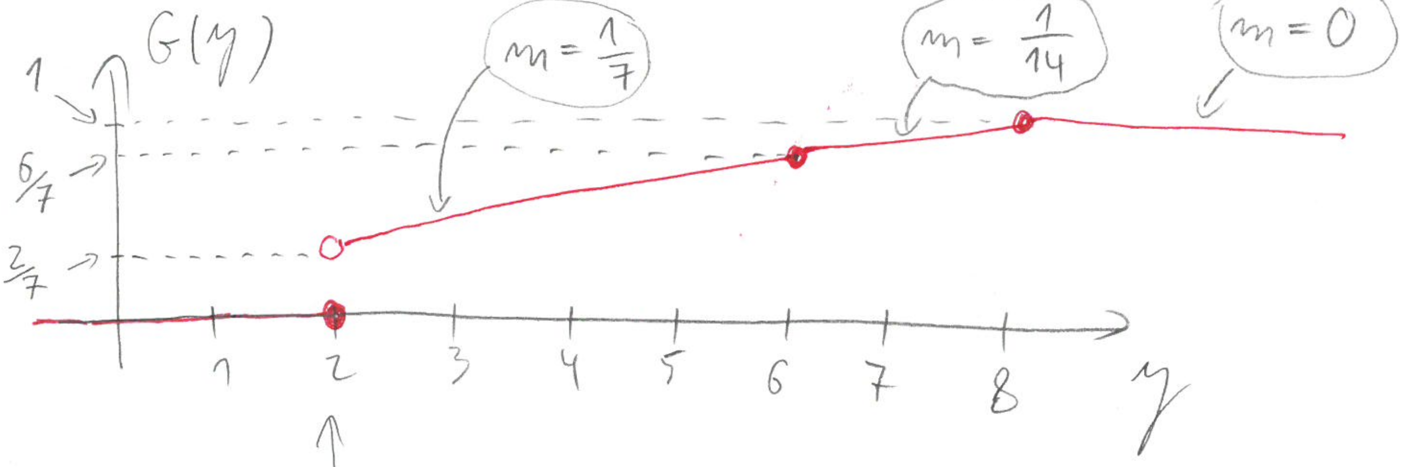
HA $6 \le y \le 8$, AKKOR

$$\mathbb{P}(Y<y)=\mathbb{P}\left(X\in\left[-3, 3+\frac{y-6}{2}\right)\right)=$$

$$\mathbb{P}(X\in[-3, y/2]) = \frac{3}{7}+y/14$$

HA $y\ge 8$, AKKOR $\mathbb{P}(Y<y)=1$

$$G(y)=\mathbb{P}(Y<y)=\begin{cases}0, & \text{HA } y\le 2\\ y/7, & \text{HA } 2<y\le 6 \\ 3/7+y/14, & \text{HA } 6\le y\le 8\\ 1, & \text{HA } y\ge 8\end{cases}$$



UGRIK, BALRÓL FOLYTONOS

$\boxed{8.7}$ TFH. F FOLYTONOS ÉS SZIG. MON. NÖVŐ.

$F(x)=\mathbb{P}(X<x)$, $Y:=F(X)$, $y\in(0,1)$:

$$\mathbb{P}(Y<y)=\mathbb{P}(F(X)<y)=\mathbb{P}(X<F^{-1}(y))=\star$$

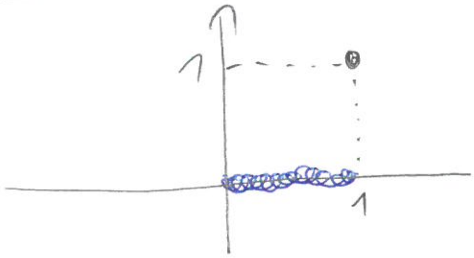
3. OLDAL

$\bigstar = F(F^{-1}(y)) = y$, TÉNYLEG: $Y \sim UNI[0,1]$

MEGJ.: $Y = F(X)$, AZAZ $\boxed{X = F^{-1}(Y)}$

TEHÁT HA F ELOSZLÁSFÜGGVÉNYŰ VAL. VÁLTOZÓT AKARUNK GENERÁLNI, AKKOR ELÉG $Y \sim UNI[0,1]$-ET GENERÁLNI, ÉS AKKOR $F^{-1}(Y)$ ELOSZLÁSFÜGGVÉNYE F LESZ!

$\boxed{8.11}$ a)



$\xi = \sqrt{1^2 + (X-1)^2}$

ξ SŰ.FV.: $g(y)$

$\psi(x) = \sqrt{1+(x-1)^2}$, $\psi'(x) = \dfrac{2\cdot(x-1)}{2\sqrt{1+(x-1)^2}}$ $(\psi \searrow)$

$\psi^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y^2-1}$ HA $1 \le y \le \sqrt{2}$:

$$g(y) = \sum_{x \in \psi^{-1}(y)} f(x) \cdot \frac{1}{|\psi'(x)|} = 1 \cdot \frac{1}{|\psi'(\psi^{-1}(y))|} =$$

$$= \left|(\psi^{-1})'(y)\right| = \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}$$, HA $1 < y \le \sqrt{2}$ (ÉS 0 EGYÉBKÉNT)

b) SZIMMETRIA MIATT UGYANAZ A SŰ.FV., MINT AZ a) RÉSZBEN.

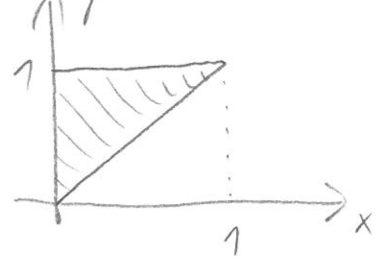
$\boxed{8.12\,(a)}$ $X \sim UNI[0,1]$, $Y \sim UNI[0,1]$

X ÉS Y FÜGGETLENEK. (TFH: EGYSÉG HOSSZÚ ROPI)

(X, Y) PONT EGYENLETES ELOSZLÁSÚ AZ EGYSÉGNÉGYZETEN. LEGYEN

$X^* := X \wedge Y$, $Y^* := X \vee Y$, EKKOR

(X^*, Y^*) PONT EGYENLETES ELOSZLÁSÚ EZEN A HÁROMSZÖGÖN:



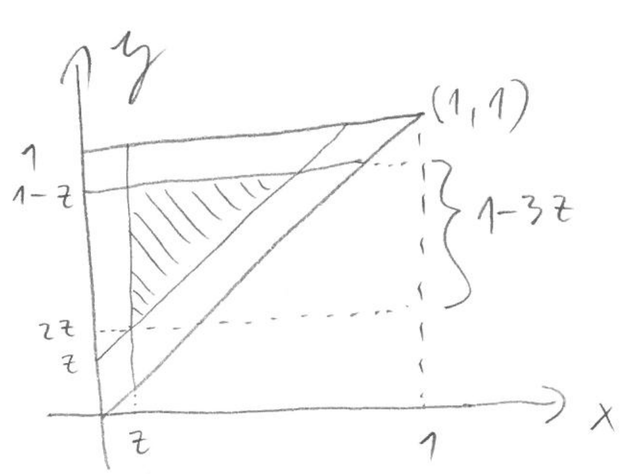
A HÁROM ROPI-DARAB HOSSZA:

X^*, $Y^* - X^*$, $1 - Y^*$

LEGRÖVIDEBB: $Z_1 := X^* \wedge (Y^* - X^*) \wedge (1 - Y^*)$

$\mathbb{P}(0 \le Z_1 \le \frac{1}{3}) = 1$, ÉS HA $z \in [0, \frac{1}{3}]$, AKKOR

$$\mathbb{P}(Z_1 \ge z) = \frac{\text{KEDVEZŐ TERÜLET}}{\text{ÖSSZES TERÜLET}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (1-3z)^2}{1/2}$$



$$\mathbb{E}(Z_1) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Z_1 \ge z)\, dz$$

$$= \int_0^{1/3} (1-3z)^2\, dz = \frac{1}{9}$$

ÉS...

5. OLDAL

ÉS HA A ROPI ℓ HOSSZÚ, AKKOR A VÁRHATÓ ÉRTÉK LINEARITÁSA MIATT

$\mathbb{E}$(LEGRÖVIDEBB HOSSZ) $= \ell/9$

$\boxed{8.14(b)}$

ELSŐ \ MAX	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$

$i \in \{1, \ldots, 6\}; \quad j \in \{1, \ldots, 6\}$

$p(i,j) = \mathbb{P}(\text{ELSŐ} = i, \text{MAX} = j)$

HA $i = j$, AKKOR $p(i,j) = \mathbb{P}(\text{ELSŐ} = i) \cdot \mathbb{P}(\text{MÁSODIK} \leq i)$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{i}{6} = \frac{i}{36}$$

HA $i < j$, AKKOR

$$p(i,j) = \mathbb{P}(\text{ELSŐ} = i) \cdot \mathbb{P}(\text{MÁSODIK} = j) = \frac{1}{36}$$

HA $i > j$, AKKOR $p(i,j) = 0$

$\boxed{8.17}$ EGYÜTTES SŰ. FV.: $f(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}[x^2+y^2 \le 1]$

AZÉRT $\frac{1}{\pi}$, MERT π AZ EGYSÉGKÖRLAP TERÜLETE

ÉS $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ ÍGY TELJESÜL.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}[x^2+y^2 \le 1]\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}\left[|y| \le \sqrt{1-x^2}\right] dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

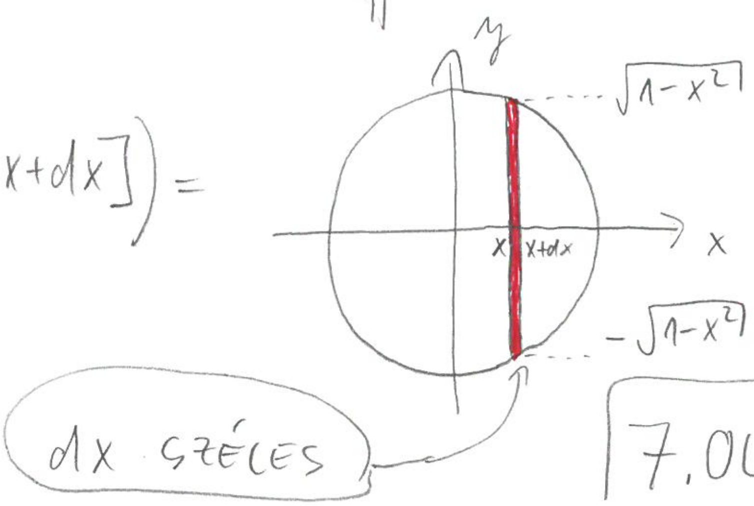
HA $-1 \le x \le 1$, AMÚGY 0, AZAZ

$$f_X(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{1-x^2}}{\pi} \cdot \mathbb{1}[-1 \le x \le 1]$$

SZIMMETRIA MIATT A MÁSIK MARGINÁLIS ELOSZLÁS SŰ. FV.-E IS UGYANEZ:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \frac{2 \cdot \sqrt{1-y^2}}{\pi} \cdot \mathbb{1}[-1 \le y \le 1]$$

$$f_X(x)\,dx = \mathbb{P}\left(X \in [x, x+dx]\right) =$$



$\boxed{8.21}$ X ÉS Y EGYÜTTESEN ABSZ. FOLYT. FÜGGETLENEK,

HA $\mathbb{P}(X \in [x, x+dx], Y \in [y, y+dy]) =$

$$\mathbb{P}(X \in [x, x+dx]) \cdot \mathbb{P}(Y \in [y, y+dy])$$, AZAZ

$$f(x,y)\,dx\,dy = (f_X(x)\,dx) \cdot (f_Y(y)\,dy)$$, AZAZ

HA $\boxed{f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)}$: SZORZAT ALAKÚ AZ EGYÜTTES SŰ.FV.

a) $$f(x,y) = x \cdot e^{-(x+y)} \cdot \mathbb{1}[x>0, y>0] =$$

$$\underbrace{x \cdot e^{-x} \cdot \mathbb{1}[x>0]}_{x \text{ FÜGGVÉNYE}} \cdot \underbrace{e^{-y} \cdot \mathbb{1}[y>0]}_{y \text{ FÜGGVÉNYE}}$$

MEGJ.: $\int_0^\infty e^{-y}\,dy = 1$, $\int_0^\infty x e^{-x}\,dx = 1$, TEHÁT

$$f_X(x) = x \cdot e^{-x} \cdot \mathbb{1}[x>0], \quad f_Y(y) = e^{-y} \cdot \mathbb{1}[y>0]$$

TEHÁT FÜGGETLENEK!

b) $f(x,y) = 2 \cdot \mathbb{1}[0<x<y<1]$ NEM SZORZAT ALAKÚ.

$f_X(x) = \int_x^1 2\,dy = 2\cdot(1-x)$, HA $0<x<1$, AMÚGY 0.

$f_Y(x) = \int_0^y 2\,dx = 2y$, HA $0<y<1$.

$f_X(x)\cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$

TEHÁT NEM FÜGGETLENEK