

① X = BOLNA POZÍCIÓJA A 400-ADIK UGRÁS UTÁN

$$X \sim \text{BIN}(400, \frac{1}{5})$$

$$0.95 \leq P(X \geq z) = P\left(\frac{X - \frac{1}{5} \cdot 400}{\sqrt{400 \cdot \frac{1}{5} \cdot (1 - \frac{1}{5})}} \geq \frac{z - \frac{1}{5} \cdot 400}{\sqrt{400 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}}\right)$$

DE MOIVRE

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{z - 80}{20 \cdot \frac{2}{5}}\right) = \frac{80 - z}{8} = \underbrace{\Phi^{-1}(0.95)}_{1.65}$$

TENÁT: $z = 66$ (VAGY BÁRMILYEN KISEBB SZÁM)

② VEGYÜK ÉSZRE, HOGY $X \sim \text{UNI}[0, 1]$ ÉS
 HA FELTESSZÜK, HOGY $X = x$, AKKOR $Y \sim \text{UNI}[0, x]$

TENÁT $f_X(x) = \mathbb{I}[0 < x < 1]$ ÉS $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{I}[0 < y < x]$

ÍGY $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{I}[0 < y < x < 1]$ ✓

a) DE AMÚGY $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^x \frac{1}{x} dy = \frac{x}{x} = 1$
HA $0 < x < 1$

TENÁT $f_X(x) = \mathbb{I}[0 < x < 1]$ ✓

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_y^1 \frac{1}{x} dx = \ln(1) - \ln(y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right)$$

HA $0 < y < 1$

(A. OCLDAC

TENÁT $f_Y(y) = \ln\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \mathbb{1}[0 < y < 1]$

b) HA $X = \frac{1}{2}$, AKKOR $Y \sim \text{UNI}[0, \frac{1}{2}]$,

így $P(Y > \frac{1}{4} | X = \frac{1}{2}) = \frac{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \text{ HOSSZA}}{[0, \frac{1}{2}] \text{ HOSSZA}} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

3) $X_i = \mathbb{1}[A_i]$, $i = 1, 2, \dots, 51$

$A_i = \{ \text{i-edik és } i+1\text{-edik LAP UGYANOLYAN SZÍNŰ} \}$

$\xi = \sum_{i=1}^{51} X_i$, így $E(\xi) = \sum_{i=1}^{51} P(A_i) = 51 \cdot \left(\frac{12}{51}\right) = 12$

HISZ HA FELFEDZÜK AZ I-EDIK LAPOT, AKKOR MARAD 51 LAP ÉS KÖZÜLÜK 12 OLYAN SZÍNŰ, MINT AZ I-EDIK.

BÓNUSZ: $\text{Var}(\xi) = E(\xi^2) - 144$

$E(\xi^2) = \sum_{i,j=1}^{51} P(A_i \cap A_j) = \text{★}$

$i=j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i) = \frac{12}{51} =: p$

$j = i \pm 1 \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} =: q$

$|j-i| \geq 2 \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = \frac{12}{51} \cdot \frac{39}{50} \cdot \frac{12}{49} + \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} =: r$

★ = $51 \cdot p + 2 \cdot 50 \cdot q + (51^2 - 51 - 2 \cdot 50) \cdot r$

SZÓRÁS = $\sqrt{\text{Var}(\xi)}$

2.00 DAC