Analízis szigorlat informatikusoknak (BMETE90AX20) tételsor

Réffy Júlia

2022/23. I. félév

Általános információk

- A szigorlati vizsgára való jelentkezés előfeltétele az „Analízis 2. informatikusoknak" (BMETE90AX22) tárgy legalább elégséges szinten való teljesítése.
- A szigorlati jegy egy 90 perces írásbeli vizsgán, valamint esetleges szóbeli részen alapul. Az írásbeli vizsga az „Analízis 1. informatikusoknak" (BMETE90AX21) és az „Analízis 2. informatikusoknak" (BMETE90AX22) tárgy tananyagát kéri számon. A számonkérés közel kétharmada a zárthelyikhez hasonló feladatmegoldás, egyharmada pedig elméleti rész, amely tételek, definíciók kimondását és egyszerűbb tételek bizonyítását jelenti.
- Az írásbeli vizsgán csak a jegyzetben található deriválttáblázat vagy azzal azonos információtartalmú táblázat használható, más segédeszköz (pl. számológép) nem.
- Az írásbeli vizsgán $*$-gal jelölt feladat(ok)ban kérjük számon az „Analízis 2. informatikusoknak" tárgy végén levő anyagrészt, amely az adott féléves zárthelyiken nem került számonkérésre. (Esetenként a többes integrálás vége és általában a Fourier-sor, Fourier-transzformáció.) **Ebben a részben külön 30%-ot el kell érni az elégséges jegyhez.**
- Ha a hallgató a dolgozattal nem ér el legalább 35%-os eredményt, vagy a $*$-os feladat(ok)ból a legalább 30%-os eredményt, akkor szigorlatának eredménye elégtelen, és ez az eredmény szóbelivel sem javítható már az adott szigorlat keretében. Egyébként a legalább 35%-ot elért hallgatók az írásbelire megajánlott jegyet kapnak. Ez 40% alatt elégtelen, 40%-tól elégséges, 55%-tól közepes, 65%-tól jó és 80%-tól jeles.
- A szóbeli rész az írásbeli dolgozat alapján megajánlott jegy módosítására szolgál. Ha az oktató nem engedélyezi (pl. 35%-os írásbeli eredmény alatt), vagy a hallgató lemond a szóbeli részről, akkor az elmarad, és a szigorlati jegy az írásbelire megajánlott jegy lesz. Egyébként a szóbeli vizsgán az oktató tetszőlegesen módosíthatja az írásbeli vizsgán megajánlott jegyet, azonban a jegy kialakításánál mind az írásbelin mind a szóbelin nyújtott teljesítményt figyelembe kell vennie.
- Alapértelmezésként minden, a tananyagban előforduló definíciót és állítást ismerni kell a szigorlaton. Ezen kívül bizonyos tételek bizonyítását is tudni kell ismertetni. Ezt pontosítja az alábbi tételsor. **A bizonyítással együtt számonkért tételeket, állításokat vastag szedéssel jelöljük.**

Tételek

Analízis 1. témaköréből

1. Komplex számok, polinomok

Komplex számok algebrai, trigonometrikus, exponenciális alakja. Euler-egyenlet. Műveletek komplex számokkal. Komplex számok konjugáltja, abszolút értéke. Komplex polinomok. Az algebra alaptétele.

2. Valós számsorozatok

Valós számsorozatok határértéke, konvergencia fogalma, **határérték egyértelműsége**, Cauchy-tulajdonság, **konvergens sorozat Cauchy** és fordítva. Végtelenhez tartó sorozatok, speciális rendőr-elv. Nagyságrendek összehasonlítása. Műveletek konvergens sorozatokkal (**összeg, szorzat, reciprok**, hányados, illetve gyökös kifejezések határértéke). **Végtelenhez, illetve 0-hoz tartó sorozatok reciprokának határértéke, korlátos és nullához tartó sorozatok szorzatának határértéke.** Nevezetes sorozatok határértéke (n^k, a^n, $\sqrt[n]{p}$, $\sqrt[n]{n}$, $(1+x/n)^n$), **rendőr-elv**. **Konvergens sorozat korlátos. Monoton és korlátos sorozat konvergens.** Bolzano–Weierstrass kiválasztási tétel. Teljes indukció és alkalmazása rekurzív sorozatok konvergenciájának meghatározásához. Sorozat torlódási pontjai, limesz szuperior, limesz inferior.

3. Függvények határértéke, folytonossága, elemi függvények

Függvények pontbeli határértéke, folytonossága. Átviteli elv. Műveletek határértékkel (**összeg, szorzat**, hányados). Szakadási helyek osztályozása. Nevezetes határértékek (pl. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

Elemi függvények (polinomok, hatvány-, trigonometrikus, exponenciális, hiperbolikus függvények és inverzeik.) folytonossága. **Összeg-, szorzat-, reciprok-**, hányadosfüggvény, **összetett függvény**, inverz függvény **folytonossága**. Kompakt halmazon folytonos függvényekre vonatkozó tételek (Bolzano-tétel, Weierstrass I. és II. tétele) és következményeik. Inverz függvény definíciója, létezése, trigonometrikus függvények inverzei, hiperbolikus függvények és inverzeik. Egyenletes folytonosság, Heine-tétele.

4. Valós függvények differenciálszámítása

Differenciálhányados fogalma, differenciálhatóság szükséges és szükséges és elégséges feltétele, kapcsolat az érintőegyenessel. Differenciálási szabályok (**összeg, szorzat, reciprok**, hányados, kompozíció, inverz deriváltja). Magasabbrendű deriváltak. Elemi függvények (hatványfüggvények, exponenciális, trigonometrikus, hiperbolikus függvények és inverzeik) deriváltjai.

5. A differenciálszámítás alkalmazásai

Érintőegyenes egyenlete. Lokális szélsőérték fogalma, kapcsolata a deriválttal (**szükséges feltétel**, elégséges feltétel). **Rolle-tétel**, Lagrange-tétel. **Integrálszámítás I. alaptétele.** L'Hospital-szabály.

Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai (monotonitás, konvexitás, inflexió), kapcsolat a deriváltakkal. Implicit megadású függvények deriválása, paraméteres megadású görbék. Függvényvizsgálat lépései, abszolút szélsőértékek meghatározása.

6. Határozatlan integrál

Primitív függvény, határozatlan integrál. Elemi függvények határozatlan integrálja, deriválási szabályok következményei a határozatlan integrálra. Integrálási módszerek (helyettesítés, **parciális integrálás**, racionális törtfüggvények integrálása).

7. Határozott integrál és alkalmazásai

Alsó- és felső közelítő összegek, finomodó felosztások, határozott integrál, Riemann-integrálhatóság, oszcillációs összeg. Newton–Leibniz tétel. Az integrálszámítás középértéktétele, Riemann-integrálható függvény abszolút értéke. Integrálfüggvény, az integrálszámítás második alaptétele. Improprius integrál. Görbék ívhossza, forgástestek felszíne, térfogata.

Analízis 2. témaköréből

8. Differenciáalegyenletek (d.e.) bevezetése, elsőrendű d.e.-ek

Differenciálegyenlet fogalma, osztályozásuk. Megoldás, általános megoldás, partikuláris megoldás, kezdetiérték-feladat. Szétválasztható változójú d.e.-ek megoldása. Elsőrendű lineáris d.e.-ek. **Az elsőrendű homogén lineáris d.e.-ek megoldásai** egydimenziós **vektorteret alkotnak. Elsőrendű inhomogén lineáris d.e. általános megoldásának alakja (két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek).** Az állandó variálásának módszere. Új változó bevezetése (spec.: $u = y/x$ és $u = ax + by$). Vonalelem, iránymező, izoklina. Partikuláris megoldás lokális vizsgálata a d.e.-hez tartozó iránymezőben, az izoklinák módszere. A d.e. megoldásait közelítő Taylor-polinomok számolása.

9. Magasabbrendű lineáris d.e.-ek

Lineáris d.e. fogalma. (Állandó/függvény-együtthatós, homogén/inhomogén.) **Az n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai** n-dimenziós **vektorteret alkotnak. Az n-edrendű homogén lineáris, konstans együtthatós differenciálegyenletnek létezik $e^{\lambda x}$ alakú megoldása.** Karakterisztikus polinom. Az általános megoldás alakja. Wronski-determináns. A homogén egyenlet megoldásai lineáris függetlenségének eldöntése a Wronski-determináns segítségével.

Az n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldásának alakja. **Két inhomogén megoldás különbsége megoldása a megfelelő homogén egyenletnek.** Az n-edrendű inhomogén lineáris d.e. partikuláris megoldásának keresése speciális jobb oldali zavaró függvény esetén próbafüggvénnyel.

10. Lineáris rekurzió

Lineáris rekurzió fogalma, alakja. **A k-adrendű lineáris rekurzióval generált sorozatok k-dimenziós vektorteret alkotnak.** A q^n mértani sorozat teljesíti a rekurziót (karakterisztikus-egyenlet). Bázis megadása egy adott lineáris rekurziót kielégítő sorozatok terében. A sorozat első k eleme egyértelműen meghatározza a sorozatot. A Fibonacci-sorozat és annak explicit alakja (a rekurzió feloldása). Fibonacci-típusú sorozatok.

11. Numerikus sorok

Numerikus sor fogalma. Konvergencia, divergencia, numerikus sor összege. **A harmonikus sor divergens. Végtelen mértani sor összege.** Sorok összege és konstansszorosa. Cauchy-kritérium, mint a sorok konvergenciájának szükséges és elégséges feltétele. **A konvergencia szükséges feltétele ($a_k \to 0$).** Leibniz-kritérium váltakozó előjelű sorokra, hibabecslés. Abszolút konvergencia és **kapcsolata a konvergenciával.** Konvergencia-kritériumok pozitív tagú sorokra: **majoráns- és minoráns kritériumok, hányados- és gyökkritérium**, ezek határértékes alakja, integrál-kritérium. **A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ sor konvergenciájának feltétele.**

12. Függvénysorozatok, függvénysorok

Függvénysorozat fogalma, konvergencia-tartománya. Egyenletes konvergencia fogalma. Az egyenletes konvergencia következménye a határértékre, deriválhatóságra és integrálhatóságra.

Függvénysor fogalma, konvergencia-tartománya. Egyenletes konvergencia. Cauchy-kritérium függvénysorokra. **Weierstrass-kritérium függvénysorokra az egyenletes és abszolút konvergencia biztosítására.** Az egyenletes konvergencia következménye a határértékre, az integrálhatóságra és a deriválhatóságra vonatkozóan.

13. Hatványsorok

Hatványsor fogalma, konvergenciája. **Egy adott pontban konvergens ill. divergens hatványsor tulajdonságai.** Konvergencia-tartomány fogalma, alakja. Konvergencia-sugár. Konvergencia-sugár meghatározása hányados- és gyökkritériummal. **Hatványsor abszolút és egyenletes konvergenciája.** Hatványsor összegfüggvényének folytonossága. Hatványsor összegföggvényének integrálja. Hatványsor tagonkénti deriválásával nyert sor konvergencia-sugara. Hatványsor összegfüggvényének deriválhatósága, a derivált hatványsora.

Egy függvényt az x_0 pontban n-ed rendben érintő, legfeljebb n-ed fokú polinom egyértelműsége (Taylor-polinom). Taylor-sor fogalma. Lagrange-féle maradéktag alakja. **Elégséges feltétel arra, hogy egy függvény Taylor-sora megegyezzen a függvénnyel.** A hatványsor alak egyértelműsége. A geometriai sorból levezethető Taylor-sorok. Az $\ln(1+x)$, $\arctan x$ függvények megegyeznek a Taylor-soraikkal a $(-1,1)$-en. Az e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ és a $\operatorname{ch} x$ függvény megegyezik a Taylor-sorával $(-\infty,\infty)$-en. Binomiális sor, összegfüggvénye és konvergencia-sugara. Az $f(x) = \arcsin x$ függvény megegyezik a Taylor-sorával a $(-1,1)$-on.

Alkalmazások: függvényérték közelítő értékének számolása, a hiba becslése, határérték meghatározása.

14. Többváltozós függvények határértéke és deriválása

Többváltozós függvények értelmezése, grafikon, szemléltetésük. Távolság, környezet fogalma; belső-, külső-, határpont, torlódási pont, zárt és nyílt halmazok, kompakt halmaz, korlátos halmaz. Pontsorozat és konvergenciája.

Többváltozós függvények határértéke és folytonossága. Ezek átviteli-elves megfogalmazása. Műveletek és a folytonosság kapcsolata, összetett függvény folytonossága. Parciális derivált fogalma. A totális derivált, gradiensvektor. **A totális derivált létezésének szükséges feltételei.** Egy elégséges feltétel.

15. A deriválás alkalmazásai

Totálisan deriválható függvény érintősíkja, teljes differenciálja, **iránymenti derivált és kiszámítása**. Gradiensvektor tulajdonságai. Melyik irányban legnagyobb ill. legkisebb az iránymenti derivált és mekkora? Magasabbrendű parciális deriváltak. Young-tétel. Lokális szélsőérték definíciója, **szükséges feltétele parciálisan deriválható függvény esetén**. A lokális szélsőérték elégséges feltétele kétváltozós függvényekre, Hesse-mátrix. Abszolút szélsőérték fogalma, meghatározása, Weierstrass-tétel. Összetett függvény deriválása.

16. Többváltozós függvények integrálása

Integrálás téglalapon. Az integrál értelmezése. Kiszámítása a Fubini-tétellel. Elégséges feltétel az integrál létezésére. Fubini-tétel speciális esete $f(x, y) = g(x)h(y)$ alakú függvényekre. Az integrál értelmezése tetszőleges korlátos halmazon. Normáltartományok és az integrál kiszámítása normáltartományon. Kettősintegrál transzformációja. Síkbeli polár koordinátarendszer, és **Jacobi-determinánsa**. Hármasintegrál kiszámítása téglatesten, normáltartományon és helyettesítéssel (gömbi ill. hengerkoordináták, és **Jacobi.determinánsuk**).

17. Fourier-sor és Fourier-transzformáció

A trigonometrikus rendszer **ortogonalitása**, lineáris függetlensége, teljessége. Az egyenletesen konvergens trigonometrikus sor együtthatóinak egyértelműsége. (Kapcsolat az összegfüggvény és az együtthatók között.) A Fourier-együtthatók kiszámítása. Összeg, konstansszoros Fourier-sora. Páros és páratlan függvény Fourier-sora. Elégséges feltétel Fourier-sor egyenletes konvergenciájára. Dirichlet-tétel (Fourier-sor pontonkénti konvergenciája.)

Függvények Fourier-transzformáltja. A Fourier-transzformált tulajdonságai. **Műveleti szabályok (linearitás, dilatáció, eltolás, moduláció, differenciálás).** Konvolúció, **kommutativitása**. **Konvolúció Fourier-transzformáltja.**