2 Vektorok

2.1 Vektorok skaláris szorzata

Az $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ illetve $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ vektorok skaláris szorzata

$$\underline{a}\underline{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = |\underline{a}||\underline{b}| \cos\alpha,$$

ahol α a két vektor által bezárt szög.

1. Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok szöge $\pi/3$, abszolútértékük: $|\underline{a}| = 3$ és $|\underline{b}| = 4$. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott skaláris szorzatok értékét

$$(a)\ \underline{a}\underline{b} \qquad (b)\ \underline{a}^2 \qquad (c)\ \underline{b}^2 \qquad (d)\ (\underline{a}+\underline{b})^2$$
$$(e)\ (\underline{a}-\underline{b})^2 \qquad (f)\ (3\underline{a}-2\underline{b})(\underline{a}+2\underline{b}) \qquad (g)\ (3\underline{a}+2\underline{b})^2.$$

2. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$(\underline{a}+\underline{b})^2 + (\underline{a}-\underline{b})^2 = 2(\underline{a}^2 + \underline{b}^2).$$

Mi ennek az azonosságnak a geometriai jelentése?

3. Az $\underline{a} + \alpha\underline{b}$ és az $\underline{a} - \alpha\underline{b}$ ($\underline{b} \neq 0$) vektorok az α paraméter mely értékeinél merőlegesek egymásra?

2 vektor pontosan akkor merőleges egymásra, ha a skaláris szorzatuk 0, tehát a

$$(\underline{a} + \alpha\underline{b})(\underline{a} - \alpha\underline{b}) = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Ebből

$$|\underline{a}|^2 = \alpha^2 |\underline{b}|^2,$$

azaz

$$\alpha = \pm\frac{|\underline{a}|}{|\underline{b}|}.$$

4. Számítsuk ki a megadott vektorok hajlásszögének koszinuszát!

a) $[3, 1, 3]$, $[1, -2, 2]$;

b) $[2, 3, -1]$, $[-1, 1, 6]$;

c) $[4,2,-3]$, $[3,6,8]$.

A skaláris szorzat képletéből

$$\cos\alpha = \frac{\underline{a}\underline{b}}{|\underline{a}||\underline{b}|},$$

tehát

a) ha $\underline{a} = [3,1,3]$, és $\underline{b} = [1,-2,2]$, akkor

$$\cos\alpha = \frac{3\cdot 1 + 1\cdot(-2) + 3\cdot 2}{\sqrt{3^2+1^2+3^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{7}{3\sqrt{19}};$$

b) ha $\underline{a} = [2,3,-1]$, és $\underline{b} = [-1,1,6]$, akkor

$$\cos\alpha = \frac{2\cdot(-1) + 3\cdot 1 + (-1)\cdot 6}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+6^2}} = \frac{-5}{2\sqrt{133}}.$$

2.2 Vektorok vektoriális szorzata

Ha $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$, akkor

$$\begin{aligned} \underline{a}\times\underline{b} &= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}. \end{aligned}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0$, akkor

$$\underline{a}\times\underline{b} = b\times c = c\times a.$$

Mivel $\underline{c} = -\underline{a} - \underline{b}$, ezért

$$\underline{b}\times\underline{c} = \underline{b}\times(-\underline{a} - \underline{b}) = -\underline{b}\times\underline{a} - \underline{b}\times\underline{b} = -\underline{b}\times\underline{b} = \underline{a}\times\underline{b},$$

és a másik egyenlőség ugyanígy bizonyítható.

6. Adva van három vektor $\underline{a} = [2,-1]$, $\underline{b} = [1,1]$ és $c = [7,1]$. Számítsuk ki annak a paralelogrammának a területét, amelynek egyik átlója a $\underline{c}$ vektor és oldalai $\underline{a}$-val illetve $\underline{b}$-vel párhuzamosak!

Ha ismerjük a parlelogramma oldalait, akkor a területe az oldalvektorok vektoriális szorzatának hossza. Ha az oldalak $\underline{a}$-val és $\underline{b}$-vel párhuzamosak, akkor felírhatók $\alpha\underline{a}$ és $\beta\underline{b}$ alakban. Az átló a 2 oldalvektor összege, tehát meg kell oldanunk a

$$\underline{c} = \alpha\underline{a} + \beta b,$$

egyenletet. Ebből

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 7 \\ -\alpha + \beta &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldásai $\alpha = 2$ és $\beta = 3$. A paralelogramma területe tehát a

$$2\underline{a} \times 3\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 18\underline{k}$$

vektor hossza, azaz 18.

2.3 Vektorok vegyes szorzata

Az $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok vegyes szorzatán az $(\underline{a} \times \underline{b})\underline{c}$ számot értjük, ennek abszolút értéke az $\underline{a}$,$\underline{b}$, $\underline{c}$ élvektorú paralelogramma alapú hasáb térfogatát adja. Az $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\underline{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok vegyes szorzata

$$\begin{aligned} \underline{abc} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 - (a_1b_3 - a_3b_1)c_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_1. \end{aligned}$$

7. Az $\underline{a} = [2, -1, 2]$, $\underline{b} = [3, 1, 5]$ és $\underline{c} = [\alpha, 2, -1]$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata milyen α esetén lesz 10?

A paralelepipedon térfogata éppen a 3 vektor vegyes szorzata, azaz

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ \alpha & 2 & -1 \end{vmatrix} = -13 - 7\alpha,$$

tehát

$$-13 - 7\alpha = 10,$$

azaz

$$\alpha = -\frac{23}{7}.$$

2.4 Analitikus térgeometria

8. Egy paralelogramma három csúcsa $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-4)$, 'es $C(-1,1,2)$. Számítsuk ki a negyedik csúcs koordinátáit!

Legyen a 4 csúcspontba mutató vektor rendre $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$. Ha a paralelogramma oldalvektorai $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ és $\overrightarrow{AC} = \underline{c} - \underline{a}$, akkor a negyedik csúcsot megadó vektor a

$$\underline{d} = \underline{a} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \underline{b} + \underline{c} - \underline{a},$$

azaz $D(-3,4,-4)$. Másik lehetőség, hogy az oldalvektorok a $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ és $\overrightarrow{BA} = \underline{a} - \underline{c}$ ekkor

$$\underline{d} = \underline{b} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{c} - \underline{b},$$

azaz $D(1,-2,8)$, a harmadik esetben pedig az oldalvektorok a $\overrightarrow{CA} = \underline{a} - \underline{c}$ és $\overrightarrow{CB} = \underline{b} - \underline{c}$, így

$$\underline{d} = \underline{c} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{c},$$

azaz $D(5,0,-4)$.

9. A következő feladatokban adott négy-négy pont egy síkban van-e?

a) $A(2,-1,4)$, $B(-1,0,3)$, $C(3,-1,0)$, $D(1,1,2)$;

b) $A(1,2,3)$, $B(3,1,6)$, $C(0,3,4)$, $D(1,3,8)$;

c) $A(1,-9,-12)$, $B(2,-7,-13)$, $C(0,-11,-11)$, $D(3,-5,-14)$.

Az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, és $\overrightarrow{AD}$, vektorok pontosan akkor vannak egy síkban, ha az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata (azaz a három vektor vegyes szorzata) 0, vagy másképpen bármely kettő vektoriális szorzata merőleges a harmadik vektorra is.

10. Egy tetraéder csúcspontjai $A(-2,0,2)$, $B(2,0,-1)$, $C(1,2,-1)$, $D(2,1,-1)$; Számítsuk ki a tetraéder térfogatát, felszínét és az ABC laphoz tartozó magasságát!

A tetraéder térfogata a három oldaléle által kifeszített paralelepipedon térfogatának hatoda, azaz

$$V_{ABCD} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}}{6} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

A felszín a lapok területének összege, azaz kell a lapokat kifeszítő vektorok vektoriális szorzatvektora hosszának a fele. Az ABC lap területe a

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -6\underline{i} + 3\underline{j} + 8\underline{k},$$

azaz

$$T_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{109}}{2}.$$

A tetraéder térfogata

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} T_{ABC} m_{ABC},$$

így

$$m_{ABC} = \frac{3V_{ABC}}{T_{ABC}} = \frac{3}{\sqrt{109}}.$$

11. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek egyik pontja az $A(2,1,4)$ pont, normálvektora pedig az $\underline{n} = [3,2,-4]$ vektor.

Egy $[n_1, n_2, n_3]$ normálvektorú, $(x_0, y, 0, z_0)$ ponton átmenő sík egyenlete

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0,$$

azaz a keresett sík egyenlete

$$3x + 2y - 4z = -8.$$