Matematika A4
I. gyakorlat megoldás

1. Kombinatorikus módszer

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$ n golyót ennyiféleképpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \ldots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l-et, ennyiféleképpen tehetjük meg

1. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

   Megoldás: Az első helyre kerülhet mind a 7 *törpe, a második helyre már csak* 6 *törpe kerülhet, és így tovább. Így a lehetséges sorrendek száma:* $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$. *(ismétlés nélküli permutáció)*

2. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?

   Megoldás: A MATEMATIKA szó 10 *betűből áll. Az előző feladat alapján* 10 *betűt* $10!$ *féleképpen lehet sorbarakni. De az A, M és T betűk ismétlődnek* $3-2-2$ *alkalommal, és ezeket nem kell megkülönböztetni egymástól. Azaz a keresett sorrendek száma:* $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 151200$. *(ismétléses permutáció)*

3. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)

   Megoldás: Az első helyezett még 5 *emberből kerülhet ki, a második már csak* 4*-ből, a harmadik pedig csak* 3*-ból. Azaz a keresett sorrendek száma* $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. *(ismétlés nélküli variáció)*

4. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet egyfajtából többet is venni?

   Megoldás: Az első gombóc 5 *féle lehet, a második gombóc szintén* 5 *féle. Így a keresett fagylaltok száma:* $5 \cdot 5 = 25$. *(ismétléses variáció)*

5. Van 6 lányismerősöm, és kettőt el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?

   Megoldás: Az első lányt még 6*-ból választhatom, a másodikat már csak* 5*-ből. De a kiválasztás sorrendje nem számít, így minden esetet kétszer számoltunk. Tehát a kiválasztások száma:* $\frac{6\cdot 5}{2} = \binom{6}{2} = 15$. *(ismétlés nélküli kombináció)*

6. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár- és 3 titkárnő-jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?

   Megoldás: 6 *tanár közül* 3*-at, míg a* 3 *titkárnő közül* 1*-et kell kiválasztani, a kiválasztás sorrendje nem számít, és bármelyik tanár-választáshoz tartozhat bármely titkárnő-választás. Így a kiválasztások száma:* $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{1} = 60$. *(ismétlés nélküli kombináció)*

7. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

   Megoldás: 10 *szám közül* 3*-at kell kiválasztani. Ez a kiválasztás a növekvő sorrendet már egyértelműen meghatározza, így a lehetséges kombinációk száma:* $\binom{10}{3} = 120$. *(ismétlés nélküli kombináció)*

2. Valószínűség

Elvégzünk egy kísérletet, például feldobunk egy kockát, amelynek lehetséges eredményeit **kimenetelek**nek nevezzük. A kimenetelek összességét egy **eseménytér**rel (egy matematikai halmazzal) modellezzük. A kimeneteleket mi választjuk meg. Megtehetjük azt is, hogy azt a két lehetőséget nézzük, hogy hatost dobtunk-e, vagy sem. Ilyenkor két kimenetel van: hatos, vagy nem hatos, és az eseménytér egy kételemű halmaz. Egy másik lehetőség, hogy 6 kimenetelt különböztetünk meg, az eseménytér az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **Események**nek nevezzük az eseménytér részhalmazait.

A kimeneteleket, vagy azok egy függvényét valószínűségi változónak nevezzük, például X = "kockadobásnál a fölül látható szám" egy *valószínűségi változó*. Ezekről később még sok szó lesz. Ha a dobott számok $Y = X^2$ négyzetét tekintjük, akkor az $1 \to 1, 2 \to 4, 3 \to 9, 4 \to 16, 5 \to 25, 6 \to 36$ függvényre is gondolhatunk, amely az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseménytéren értelmezett. De tekinthetjük egyből az $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ eseményteret is, ezt mi dönthetjük el.

Egy kísérletsorozatban az egyes eseményekhez tartozó relatív gyakoriságok a kísérletek számának növelésével bizonyos értékek körül "ingadoznak" (a kísérletszám növelésével konvergálnak egy-egy elméleti értékhez), ezt az értéket nevezzük az adott esemény (tapasztalati) **valószínűség**ének. A valószínűség pontos matematikai fogalmát a Kolmogorov-féle axiómák írják le.

A valószínűségszámítás legegyszerűbb modellje az, amikor *véges sok, egyformán valószínű kimenetel van*. Ekkor egy adott A esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetelek száma}}.$$

Ennél valamivel általánosabb az ún. *diszkrét eseménytér*, amikor véges sok, vagy megszámlálhatóan végtelen sok ω_k kimenetel van. Ekkor egy adott A esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_k \in A} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = \sum_{\omega_k \in A} p_k.$$

8. Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?

   Megoldás: Az eseménytér: { II, FI, IF, FF}. Innen

$$\mathbb{P}(\textit{dobunk fejet}) = \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan 1 fejet dobunk}) = \frac{2}{4}.$$

9. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?

   Megoldás: Az első húzásnak itt csak abból a szempontból van jelentősége, hogy ez határozza meg a színt. Az összes eset a második húzás során is 32*, a kedvező esetek száma pedig* 24*, hisz ennyi lap lesz különböző bármit is húztunk elsőre.*

   $$\mathbb{P}(\textit{két lap különböző}) = \frac{24}{32} = \frac{1}{2}.$$

10. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?

    Megoldás: A feladat megoldható leszámlálással vagy a komplementer esemény segítségével. $\mathbb{P}(\textit{legalább az egyik 6-os}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{egyik sem 6-os})$*. Az összes eset száma* $6 \cdot 6 = 36$*, míg a kedvező esetszám a komplementer esetben* $5 \cdot 5 = 25$*.*

    $$\mathbb{P}(\textit{legalább az egyik 6-os}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36},$$

    $$\mathbb{P}(\textit{egyik sem 6-os}) = \frac{25}{36}.$$

11. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?

    Megoldás: Az eseménytér: $\{FFF, FFL, FLF, LFF, FLL, LFL, LLF, LLL\}$*. Így*

    $$\mathbb{P}(\textit{gyerekek egyneműek}) = \frac{2}{8}.$$

12. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

    Megoldás: Itt is a komplementer esemény valószínűségét könnyebb kiszámolni. Ha n*-szer dobunk a kockával, akkor* $\mathbb{P}(\textit{legalább 1 fej}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$*. A feltétel szerint* $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0,9$*. Ha ezt az egyenlőtlenséget megoldjuk, akkor azt kapjuk, hogy* $n \geq 4$*.*

13. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?

    Megoldás: Az összes eset száma nem más, mint a 7 *könyv sorbarendezése, azaz permutációja:* $7!$*. A kedvező esetek azok, amikor a trilógia kötetei egymás mellé kerülnek. A trilógia kötetei lehetnek az* $1-3$*,* $2-4$*,* $3-5$*,* $4-6$*,* $5-7$ *helyeken. Ez* 5 *eset. Ám a trilógia kötetei tetszőleges sorrendben lehetnek ezeken belül (*$3!$*), csakúgy, mint a többi könyv (*$4!$*). Így*

    $$\mathbb{P}(\textit{trilógia kötetei egymás mellé kerülnek}) = \frac{5 \cdot 3! \cdot 4!}{7!} = \frac{1}{7}.$$

14. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

Megoldás: Az összes eset száma ebben az esetben 6^6, *míg a kedvező esetek száma a* 6 *szám összes lehetséges sorbarendezése, azaz* $6!$. *Így*

$$\mathbb{P}(\textit{mind a hat szám előjön}) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}.$$

15. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találomra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?

Megoldás: Rögzítsük, hogy Ronaldo melyik csapatba kerül (ez szimmetriai okok miatt megtehető). Ekkor az összes eset: $\binom{21}{10}$*-féleképp lehet feltölteni a csapatát. Kedvező esetek száma:* $\binom{20}{10}$*-féleképp lehet feltölteni a csapatát Ronaldinho nélkül.*

$$\mathbb{P}(\textit{különböző csapatba kerülnek}) = \frac{\binom{20}{10}}{\binom{21}{10}} = \frac{11}{21}.$$

16. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón (90-ből 5 számot húznak, sorrend nem számít) pontosan két találatunk lesz? És hogy legalább két találatunk lesz?

Megoldás: Az összes eset szám: $\binom{90}{5}$*, hisz ennyiféleképpen tudunk kiválasztani* 90 *számból* 5*-öt. Kedvező esetek száma: az* 5 *kihúzott számból választottunk* 2*-t, és a maradék* 85*-ből választottunk* 3*-at,* $\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}$*. (hipergeometrikus eloszlás)*

$$\mathbb{P}(\textit{pontosan 2 találat}) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

A legalább két találat az jelenti, hogy $2, 3, 4, 5$ *találatunk lehet, ezeket a valószínűségeket kell összeadni. (komplementer eseménnyel is számolhatunk)*

$$\mathbb{P}(\textit{ legalább 2 találat}) = \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{85}{3}+\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}+\binom{5}{4}\cdot\binom{85}{1}+\binom{5}{5}\cdot\binom{85}{0}}{\binom{90}{5}}.$$

17. Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki?

Megoldás: Ez a feladat az előzőhöz hasonlóan oldható meg. Az összes eset szám: $\binom{10}{4}$*, hisz ennyiféleképpen tudunk kihúzni* 100 *golyóból* 4*-et. Kedvező esetek száma: a* 6 *zöld golyóból húztunk* 2*-t, és a maradék* 4 *sárgából* 2*-t,* $\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}$*. (hipergeometrikus eloszlás)*

$$\mathbb{P}(\textit{két zöldet húzunk}) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}}.$$

18. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?

Megoldás: A feladatot egyszerűbb a komplementer módszerrel megoldani: $\mathbb{P}(\textit{legalább két ember született egy napon}) =$

$1-\mathbb{P}($*mindenki különböző napon született*$)$. *Komplementer esetben az összes esetek száma:* 365^{23}*, míg a kedvező esetek száma:* $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 344$.

$$\mathbb{P}(\textit{legalább 2 ember született egy napon}) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot 344}{365^{23}}.$$

19. Mi a valószínűbb: 6 kockadobásból legalább egyszer hatost dobni, vagy 12 kockadobásból legalább 2-szer hatost dobni?

    Megoldás: Itt is a komplementer események valószínűségét érdemes kiszámolni. A 10*-es feladat alapján*

$$\mathbb{P}(\textit{6-ból legalább 1-szer hatos}) = 1 - \frac{5^5}{6^6},$$

$$\mathbb{P}(\textit{12-ből legalább 2-szer hatos}) = 1 - \frac{5^12}{6^12} - \frac{12 \cdot 5^11}{6^12},$$

3. További feladatok

20. Addig dobálunk fel egy szabályos érmét, amíg az első fej kijön. Írja fel az eseményteret, amelyben a kimenetelek a I (írás) és F (fej) betűk véges ill. végtelen sorozatai! Tegyük fel, hogy egy k betűből álló kimenetel valószínűsége $1/2^k$.

    (a) Mutassa meg, hogy a véges hosszúságú sorozatok valószínűségei összesen egyet adnak, így a végtelen hosszú kimenetel (hogy mindig írást dobunk) valószínűsége zérus, bár ez a kimenetel is lehetséges!

    Megoldás

    (b) Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb három dobás elegendő a fejhez?

    Megoldás

    (c) Mutassa meg, hogy $1/2^k$ a valószínűsége, hogy a dobás-sorozat nem ér véget a k-adik dobásig bezárólag, vagyis nem dobunk fejet az első k dobásban.

    Megoldás

21. Három egyformán erős játékos: A, B és C játszik páros mérkőzéseket. Elsőként A és B játszik, majd a győztes játszik C-vel, és így tovább, mindaddig, amíg valaki kétszer egymás után nyer és így megnyeri az egész meccset. (A döntetlen lehetőségét kizárjuk.) Írja fel az eseményteret, amelyben a kimenetelek a mérkőzések győzteseit megadó betűk véges ill. végtelen sorozatai! Tegyük fel, hogy bármely mérkőzést bármely játékos $1/2$ valószínűséggel nyer meg, és egy k betűből álló kimenetel valószínűsége $1/2^k$.

    (a) Mutassa meg, hogy a véges hosszúságú sorozatok valószínűségei összesen egyet adnak, így a végtelen hosszú kimenetelek valószínűsége zérus (bár ezek a kimenetelek is lehetségesek)!

    Megoldás

    (b) Mutassa meg, hogy A, ill. B $5/14$ valószínűséggel nyeri meg a meccset, míg C győzelme $4/14$ valószínű!

    Megoldás

    (c) Mutassa meg, hogy $1/2^{k-1}$ a valószínűsége, hogy a meccs nem ér véget a k-adik mérkőzésig bezárólag.

    Megoldás

22. Feldobunk két szabályos kockát. Legyen A az az esemény, hogy a dobott számok összege páratlan, B az az esemény, hogy legalább egy hatost dobtunk. Írja fel az $A \cap B$, $A \cup B$, és $A \cap \bar{B}$ eseményeket mint kimenetelek részhalmazát! Számítsa ki a valószínűségüket!

23. Egyszerűsítse le az alábbi kifejezéseket: (a) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (b) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$, (c) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

    Megoldás

24. Legyen A, B és C három tetszőleges esemény. Keressen olyan halmazalgebrai kifejezéseket, amelyek pontosan a következő eseményeket adják meg: (a) csak A következik be, (b) A és B bekövetkezik, de C nem (c) mindhárom esemény bekövetkezik, (d) legalább egyikük bekövetkezik, (e) legalább kettő bekövetkezik, (f) pontosan egyikük következik be, (g) pontosan kettő következik be, (h) egyik sem következik be, (i) legfeljebb kettő következik be.

    Megoldás